



Oneindig en oneindig is twee

Anne Schatteman

Luc Van den Broeck

Inhoud

1. Inleiding
2. 'Oneindig' in de eerste en de tweede graad
 - 2.1. De getallenverzamelingen
 - 2.2. Binnen de meetkunde
 - 2.3. Oneindig durende processen
3. Kardinaliteit
 - 3.1. Bijecties
 - 3.2. Aftelbaar oneindige verzamelingen
 - 3.3. Overaftelbare verzamelingen
4. Hotel van Hilbert
 - 4.1. Oneindig veel kamers
 - 4.2. Oneindig veel onverwachte gasten
 - 4.3. Oneindig maal oneindig
 - 4.4. Oneindig veel daklozen
5. Onbepaaldheden
6. Oneindige sommen en oneigenlijke integralen
 - 6.1. Oneindige sommen
 - 6.2. Oneigenlijke integralen
 - 6.3. De trompet van Torricelli
7. Namijmeren over grote getallen en relevantie van het begrip oneindig

1. Inleiding

Misvattingen

De betekenis van het begrip oneindig is voor de meeste mensen vaag. Vraag je aan collega's of aan leerlingen wat er met oneindig bedoeld wordt, dan krijg je uiteenlopende antwoorden:

een getal groter dan elk ander getal, het heelal, je kunt er steeds 1 bijtellen, de tijd, 9999999... Wat opvalt: iedereen is gefascineerd door het begrip. Maar er is nood aan het exact maken van de intuïtieve kennis van het begrip oneindig.

Alleen al binnen de wiskunde dekt het woord 'oneindig', net zoals het symbool ∞ trouwens, een grote lading. We kunnen oneindig bijvoorbeeld zien als een (onbegrensd) aantal. Maar bedoelen we hiermee het aantal elementen van de verzameling van de natuurlijke getallen of eerder het aantal elementen van de verzameling van de reële getallen? En gebruiken we de term in de analyse ook niet bij limieten ($x \rightarrow +\infty$)? En rekenen we dan niet met ∞ , alsof het een getal zou zijn? Hoe verwarrend. We willen in deze loop duidelijk maken dat we voorzichtig dienen om te springen met deze verschillende invalshoeken, want de betekenis van het begrip 'oneindig' in deze contexten is niet dezelfde. We gebruiken hetzelfde woord voor andere begrippen.

Verder bestaan er heel wat misconcepties rond het begrip oneindig. Niet te verwonderen dat heel wat grote wiskundigen hier in het verleden moeite mee hadden. Denken we bijvoorbeeld aan de paradoxen van Zeno, die berusten op de misvatting dat de som van oneindig veel positieve getallen oneindig is. We kunnen ook denken aan de paradox van Galilei uit de Dialoog tussen Simplicio, Salviati en Sagredo: er zijn meer natuurlijke getallen dan kwadraten maar toch heeft elk natuurlijk getal precies één kwadraat. Verder is er nog de bekende paradox over de trompet van Torricelli, die een eindige inhoud heeft en een oneindige oppervlakte. We kunnen deze trompet niet aan de binnenkant schilderen met een eindig aantal verfpotten.

Maar misschien kunnen we ze wel volgieten met verf en ze daarna weer leeggieten in de hoop dat er een laagje verf aan de binnenkant blijft zitten.

Het doel van deze loop is verschillende aspecten van oneindig te verduidelijken en om alertheid te creëren voor gevaarlijke intuïtieve gevolgtrekkingen.

Verschillende betekenissen

Het begrip oneindig duikt op verschillende manieren op.

‘Oneindig’ kun je zien als een kardinaalgetal van een niet eindige verzameling. We zitten dan in de context van de *verzamelingsleer*. Alhoewel deze context nergens een doel op zich is in het secundair onderwijs, kunnen we er niet omheen willen we het begrip oneindig verduidelijken. Onze leerlingen komen het begrip oneindig tegen van in de eerste graad: ze leren dat er oneindig veel natuurlijke (gehele, rationale...) getallen zijn en dat er oneindig veel punten op een rechte liggen. In deze loop willen we aanmoedigen om dit aspect van het begrip oneindig niet uit de weg te gaan in de sterkere klassen, en dit reeds van in de eerste graad. De begrippen ‘verzameling’ en ‘bijjectie’ zijn dan wel belangrijk, maar kunnen omschreven worden in een terminologie die dichtbij de leerlingen staat en via talrijke voorbeelden. Het kader van ‘verzamelingen en relaties’ hoeft ook niet op een abstracte wijze theoretisch behandeld te worden. We denken juist dat er veel meer woorden nodig zijn om de oneindigheid van de getallenverzamelingen en van rechten en lijnstukken in het vlak te beschrijven. Er wordt daar nu nogal snel overgegaan, met mogelijke misvattingen als gevolg.

Het tweede beeld dat we naar voor willen brengen, is het feit dat ‘oneindig’ geen getal is maar gezien kan worden als een *limietsituatie van een dynamisch proces*. Van zodra er reële functies met een asymptotisch gedrag verschijnen in het leerplan (tweede graad) komt dit aspect ter sprake. In deze context kunnen later ook bewerkingen met oneindigheden gemotiveerd worden. De bewerking $\infty + \infty$ betekent dan: als we twee functies hebben die naar oneindig gaan (voor $x \rightarrow a$) dan zal de somfunctie ook naar oneindig gaan (voor $x \rightarrow a$). ‘Naar oneindig gaan’ is een uitdrukking die een diepe betekenis heeft. Ook hier zijn weer meer woorden voor nodig om het juiste inzicht te bekomen.

In de analyse speelt niet alleen het oneindig grote een rol, maar ook het oneindig kleine (bij limieten, continuïteit, afgeleide...). In deze loop zullen we het voornamelijk hebben over oneindig groot en veel minder over oneindig klein.

Wat mag je verder verwachten

Paragraaf 2 gaat over het wegwerken van misvattingen over oneindig in de eerste en de tweede graad. We laten zien dat de terminologie en notaties voor getallenverzamelingen niet altijd transparant zijn voor leerlingen. We gaan in de klas vaak veel te snel over het begrip oneindig. Hetzelfde geldt voor elementaire meetkunde-begrippen. De natuurlijke nieuwsgierigheid van de leerlingen rond het mysterieuze begrip ‘oneindig’ kan een start zijn voor een boeiend klasgesprek zo dat de leerlingen de juiste basis leggen voor dit begrip.

In paragraaf 3 wordt de wiskundige achtergrond behandeld van ‘oneindig als kardinaalgetal’: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar oneindig, $\mathbb{R}$ is overaftelbaar oneindig. Werkteksten maken het mogelijk om dit op het eerste zicht moeilijke aspect toch begrijpbaar te maken voor leerlingen vanaf de tweede graad, al kunnen leerlingen uit de eerste graad hier mogelijk ook een graantje van meepikken. Het afpaarmechanisme kan immers gebruikt worden om de moeilijkere term ‘bijjectie’ te onderscheppen.

De paragrafen 4, 5 en 6 zijn eerder bestemd voor de lessen in de derde graad. In het ‘Hotel van Hilbert’ achterhalen we waarom een volgeboekt, denkbeeldig hotel met aftelbaar veel kamers plaats kan bieden aan een nieuwe groep toeristen, zelfs al zijn ze met oneindig veel. Verder belichten we een hele serie onbepaalde bewerkingen met oneindig: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$...

In een klasgesprek zoeken we uit waarom deze bewerkingen onbepaald zijn. Tot slot geven we nog een woordje uitleg bij de oneindige sommen en oneindige integralen die in sommige richtingen van de derde graad aan bod komen.

We eindigen in paragraaf 7 met enkele filosofische vragen zoals ‘komt oneindig voor in de realiteit?’ en ‘wat zijn de grootste getallen die tot nu toe echt betekenis hebben?’

In de klas

Deze loop kan op verschillende manieren gebruikt worden. Misschien wordt het thema gekozen om in een vrije ruimte tijd aan te besteden. Dit kan. Maar deze loop is niet in de

eerste plaats met dit doel geschreven. We willen eerder een inhoudelijke houvast bieden voor wanneer het begrip 'oneindig' ter sprake komt in de dagelijkse lessen. Als je leerlingen een goed inzicht in het begrip 'oneindig' wilt geven, worden die klasgesprekken best niet uit de weg gegaan. Maar wanneer de leerkracht zich laat overhalen tot een onvoorbereide discussie over dit onderwerp, lopen de gesprekken soms uit de hand en gaat de schoolbel op het einde van de les vooraleer er een duidelijk resultaat is geboekt. Deze loep biedt de leerkracht enkele opdrachten die uit de boekentas kunnen worden gevist als het wonderlijke moment van gezonde nieuwsgierigheid van de leerlingen de bovenhand neemt. Door deze loep preventief door te nemen, bereidt de leerkracht discussieargumenten voor een klasgesprek voor. Je zou deze loep dus kunnen beschouwen als een voorraad diepgevroren pakketjes die je laat ontdooien wanneer de honger er is.

2. 'Oneindig' in de eerste en de tweede graad

2.1. De getallenverzamelingen

De natuurlijke getallen

Reeds van in het begin in de eerste graad komen leerlingen in contact met verschillende aspecten van het begrip 'oneindig'. We starten in het eerste jaar met de introductie van de natuurlijke getallen. We zien elk natuurlijk getal als een telresultaat, wat een juiste en heel 'natuurlijke' zaak is. Maar dan worden er heel snel notaties ingevoerd:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

waarbij in de handboeken vermeld wordt

1. dat het een verzameling is;
2. dat de elementen opgesomd worden of in een lijst worden neergeschreven met speciale accolades errond;
3. dat de puntjes achteraan aangeven dat er oneindig veel elementen in zitten; (soms staat dit er niet bij);
4. dat die verzameling genoteerd wordt met $\mathbb{N}$.

Hier vallen we met de deur in huis. De begrippen die hier aangeraakt worden (verzameling, opsomming, $\mathbb{N}$) komen niet uit de dagelijkse taal. Laten we niet hopen dat door die woorden gewoon af en toe te gebruiken de leerlingen het juiste begrip en inzicht gaan leren. Dit is niet

gewoon 'taal'. Hier zitten moeilijke concepten achter. Elk van deze vermeldingen vraagt veel meer uitleg zonder dat we verzamelingenleer op een theoretische manier moeten onderwijzen.

1. Een verzameling is een collectie van verschillende objecten die duidelijk te onderscheiden zijn van elkaar. We voegen hier best nog enkele voorbeelden aan toe waarbij het duidelijk wordt dat er geen dubbels mogen inzitten, dat de objecten niet noodzakelijk iets met elkaar moeten te maken hebben, met variatie in 'aantal elementen'...
2. De komma's geven aan dat we de natuurlijke getallen in een rijtje kunnen plaatsen. De volgorde doet er niet toe, hoewel we toch meestal kiezen in volgorde van grootte. Dit kunnen we vaak doen met de objecten van een verzameling maar niet altijd. Als je ze op een rijtje kunt zetten, kun je erbij zeggen "dit is het eerste element, dit is het tweede, het derde, enz."
3. Die drie puntjes willen zeggen dat de opsomming niet stopt, dat er steeds een nieuw getal, verschillend van alle vorige kan gevonden worden dus dat er oneindig veel elementen in de verzameling zitten. Misschien leggen we hier best niet te veel nadruk op het alsmaar groter worden van de getallen; dit benadrukt eerder de onbegrensdsheid dan de oneindigheid.
4. Er staat bij de verzameling een naam, in symbolen ' $\mathbb{N}$ ', in woorden 'de verzameling van de natuurlijke getallen'.

We hebben dus heel wat te vertellen om de uitdrukking in (1) betekenis te geven.

De gehele getallen

Na een instap waar de focus ligt op de introductie van het toestandsteken, lijkt het dat de gehele getallen zonder veel moeite, in navolging van $\mathbb{N}$, kunnen worden aangebracht.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Niets is minder waar. De uitdrukking omvat weer heel wat; opnieuw is er veel dialoog nodig om dit zonder misvattingen te verwerken.

De gehele getallen zijn een uitbreiding van de natuurlijke getallen, dus ze vormen zeker ook een oneindige verzameling. Maar die drie puntjes links intrigeren. Ik hoor het de leerlingen al zeggen: 'oneindig langs twee kanten, dat is straf: het lijkt dubbel oneindig te zijn'. De oneindigheid van $\mathbb{Z}$ krijgt dus een

klemtoon die het niet verdient. Misschien is dit het uitgelezen ogenblik om te filosoferen over 'oneindig': is het oneindig van $\mathbb{Z}$ inderdaad 'groter' dan dat van $\mathbb{N}$?; kunnen we de elementen van $\mathbb{Z}$ ook in een lijst rangschikken?; we zien in de bovenstaande uitdrukking toch niet een eerste element, een tweede element, enz.? Met een aangepaste vraagstelling komen we zeker tot een andere voorstelling van de verzameling bv.

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$$

Met een goede bordschikking introduceren we een afpaarmechanisme dat met elk element van $\mathbb{N}$ een element van $\mathbb{Z}$ laat overeenkomen en omgekeerd:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \dots & \} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{Z} = & \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \dots & \} \end{array}$$

Hoe vreemd: een deel van $\mathbb{Z}$ met 'evenveel' elementen als $\mathbb{Z}$. We kunnen in de klas opmerken dat we oneindige verzamelingen niet met dezelfde terminologie omschrijven als we gebruiken voor eindige verzamelingen. Woorden zoals 'evenveel', 'meer' / 'minder' hebben in deze context geen zin. We belichten samen met de leerlingen hoe eindige verzamelingen verschillen van oneindige verzamelingen.

Voorbeeld

Alle elementen van $\mathbb{Z}$ kunnen we identificeren (afparen) met elementen van een echt deel van $\mathbb{Z}$, namelijk $\mathbb{N}$. Dat kunnen we met eindige verzamelingen nooit realiseren: er is geen identificatie mogelijk tussen $\{A, B, C, D\}$ en $\{C, D\}$

A	→	C
B	→	D
C	→	?
D	→	?

Het is belangrijk dat deze bedenkingen luidop gemaakt worden, en ook meer dan een keer.

De rationale getallen

Na een instap die het bestaan van breuken, ook negatieve, motiveert, komen we in de klas bij de definitie van rationale getallen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0 \right\} \quad (1)$$

Wat een ommezwaai in notatie: geen puntjes meer, geen lijst van getallen gescheiden door komma's... Bovendien wordt er gebruik gemaakt van een nieuw symbool: de verticale streep

betekent 'waarvoor geldt'; binnen de accolades van een verzameling gebruiken we hiervoor geen dubbel punt. De leerlingen weten zeker en vast dat er hier ook sprake is van oneindig veel getallen, maar het lijken er oeverloos veel... veel meer dan ervoor, zo veel dat het lijkt alsof ze niet meer in een lijst kunnen geplaatst worden. Weken nadien durven sommige leerlingen zelfs iets in de volgende zin op te schrijven, omdat ze de abstracte formulering vergeten zijn.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots -\frac{7}{3}, -1, -\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \right\} \quad (2)$$

Onze opmerkingen in de zin van 'zo hebben we dat toch nooit genoteerd?' 'Zo ben je toch niet volledig?' zijn niet overtuigend: alsof we met onze beschrijvingen van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ wel volledig zijn geweest.

Veel aspecten in bovenstaande notatie zijn wel interessant en roepen vragen op:

- Kunnen we de rationale getallen in lijst brengen? Ja. Zie verder voor meer uitleg hierover.
- Zijn er oneindig veel elementen? Ja.
- Er zit geen systeem in de opsomming? Ja. Maar is een systeem nodig?
- Kan ik met deze beschrijving van $\mathbb{Q}$ nagaan of een getal al dan niet een rationaal getal is? Neen.

Deze vierde vraag toont dus aan dat de notatie (2) fout is. Ook de derde vraag moet verder met de leerlingen onder de loep genomen worden. Dit kunnen we bijvoorbeeld aan de hand van het rooster positieve rationale getallen in figuur 1.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Figuur1

We vragen de leerlingen om creatief te zijn: hoe zouden we deze getallen kunnen doorlopen door er een lijst van te maken? Welk getal plaatsen we op de eerste plaats, welk op de tweede..... Wat

lukt niet? Het doorlopen via de diagonaalrichting zal wellicht ter sprake komen. We verwijzen naar een opdracht in paragraaf 3.

De reële getallen

In de tweede graad komen de reële getallen op het toneel en dat is serieuze materie.

Van bij het begin identificeren we de reële getallen met de punten van een rechte. Die identificatie mogen we gerust in sterke richtingen een bijjectie noemen, maar het moet niet. We stellen voor om met de leerlingen te filosoferen over het oneindige karakter van $\mathbb{R}$, nogmaals om misconcepties te vermijden. Laten we hen ook de verrassing niet ontnemen bij het ontdekken van die nieuwe oneindigheid. Een klasgesprek kan aanvankelijk volgende bedenkingen naar boven laten komen indien analoge gesprekken ook ooit vroeger gevoerd werden bij $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$:

- Zouden we de reële getallen ook in een oneindige lijst kunnen plaatsen net zoals de rationale getallen?
- Waarom hebben we het gevoel dat er heel veel reële getallen zijn? Tussen twee reële getallen liggen er toch oneindig veel andere? Is dat eigenlijk ook niet het geval voor de rationale getallen? Die konden we toch op een rijtje plaatsen?

Dus er is aanvankelijk geen reden om niet aan te nemen dat de oneindigheid van $\mathbb{R}$ dezelfde is als die van $\mathbb{N}$. In sterke klassen zijn we dan op het punt gekomen om de verder beschreven opdrachten (we verwijzen naar paragraaf 3) i.v.m. de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ uit te voeren.

2.2. Binnen de meetkunde

Reeds in de eerste les meetkunde in het eerste jaar van het secundair komen de moeilijkste aspecten van het begrip 'oneindig' aan bod. We citeren uit de eerste bladzijden van enkele handboeken:

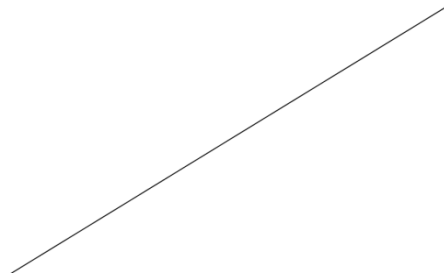
'Het vlak is een oneindige verzameling van punten. Het is onbegrensd. Het loopt oneindig voort naar boven, onder, links en rechts. ... Een rechte is een verzameling van punten en dus een deelverzameling van het vlak. Een rechte is onbegrensd.'

Of in een ander handboek:

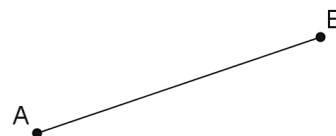
'Een rechte kunnen we ons voorstellen als een gespannen touw, dat we zowel links als rechts nog oneindig ver kunnen afrollen.'

Een rechte is onbegrensd. Een lijnstuk is begrensd aan twee kanten.'

Niet alleen komt er in de handboeken bijna telkens het begrip 'verzameling' ter sprake, bovendien worden de woorden 'oneindig' en 'onbegrensd' door elkaar gebruikt. We moeten hierbij heel voorzichtig zijn. Het doet lijken alsof ze synoniem zijn, wat helemaal niet het geval is. Daarboven komt nog dat we een rechte grafisch als volgt voorstellen:



Dus lijkt het alsof ze begrensd is. Een lijnstuk stellen we zo voor:



Hier zien we de grenspunten duidelijk. Wil dat dan zeggen dat deze verzameling niet oneindig is? Leerlingen zouden dit verkeerdelijk zo kunnen interpreteren.

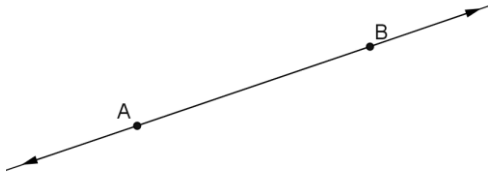
Opnieuw pleiten we ervoor om deze begrippen uitvoerig te omschrijven op het niveau van de leerlingen, om alle misopvattingen hierover in de kiem te smoren.

Een schema van mogelijke opbouw van een klasgesprek zou het volgende kunnen zijn:

- We zetten een stip op het bord en benadrukken 'dit is geen punt'. We plaatsen een stipje en benadrukken opnieuw 'dit is geen punt'. We herhalen dit en overdrijven. 'We kunnen het ons niet voorstellen, maar een punt heeft geen dikte. Het is iets ideaal. We kunnen het niet tekenen. We kunnen het ons alleen maar inbeelden'. We doen hetzelfde met een stip op een lessenaar.... Hoeveel punten kunnen we zo plaatsen op het bord, de lessenaar...?
- We nemen een touw en we veronderstellen dat het ideaal is, d.w.z. het touw heeft geen dikte. Dit kunnen we ons helemaal niet voorstellen want we voelen een dikte. We moeten het ons dus 'inbeelden'. We leggen

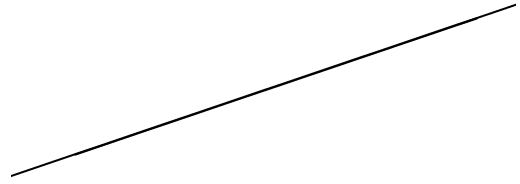
het touw op een lessenaar. Het 'ideale touw' bevat dus punten. Hoeveel punten?

- We spannen een deel van het touw op tussen beide handen. We benadrukken de twee eindpunten die het touwtje begrenzen. Dit stelt een begrensde verzameling van punten voor. We noemen dit een lijnstuk. Hoeveel punten liggen erop?
- Het touwtje staat strak gespannen. Het is 'recht'.
- We verlengen het gespannen touw door twee punten vast te houden die verder van elkaar liggen. Hoeveel punten liggen erop? Is het begrensd of niet?
- We tekenen de situatie op het bord:



We beelden ons in dat we de twee eindpunten van elkaar doen wegvliegen, zonder dat die punten ergens stoppen. Hebben we dan nog grenspunten? We hebben geen lijnstuk meer. We hebben een rechte. Kunnen we die tekenen? Waarom niet? We zullen dus iets afspreken: als we een lijnstuk tekenen, duiden we heel duidelijk de grenspunten aan. Willen we de illusie van een rechte opwekken dan

tekenen we:

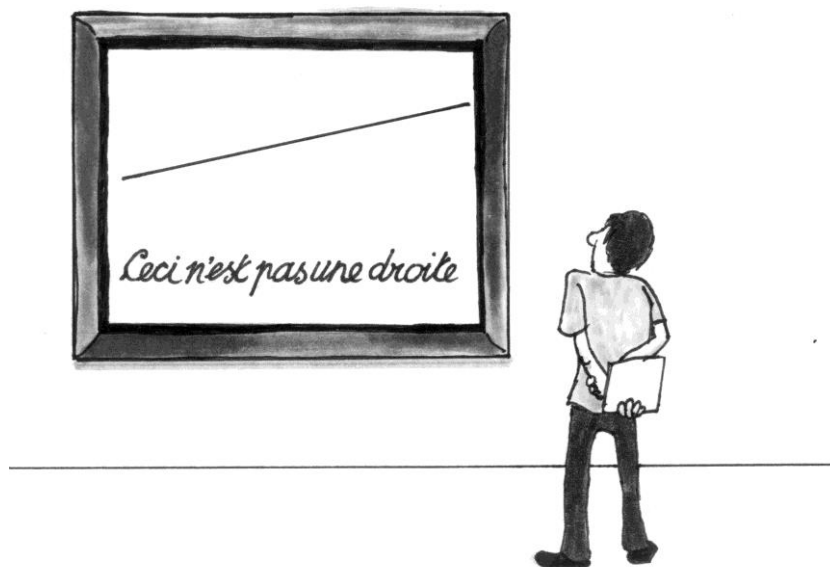


We zien geen grenspunten meer.

Om de nieuwe inzichten te verstevigen vatten we samen:

- Hoeveel punten liggen er op een rechte? Is een rechte begrensd?
- Hoeveel punten liggen er op een lijnstuk? Is een lijnstuk begrensd?
- Neem ik twee punten vast op de rechte, wat stelt het deel ertussen dan voor? Hoeveel punten liggen er op dat lijnstuk? Stel ik neem een korter lijnstuk; nog een korter... steeds oneindig veel punten... dus tussen twee punten liggen...?

Het is belangrijk in deze dialoog te overdrijven en de elementen vaak te herhalen. Visualiseer de ideeën door bijvoorbeeld een touw te spannen van het ene einde van de klas naar het andere einde. Laat dit in de naburige klas doorlopen... Blijf in volgende lessen deze aspecten van onbegrensd en oneindig herhalen. Deze moeilijke begrippen worden niet verwerkt in één lesuur.



Het symbool ∞

Tot nu toe hebben we vooral het kardinale karakter van oneindig aan bod laten komen, dus 'oneindig' als een maat voor een aantal elementen van een niet eindige verzameling. Soms gebruiken we hetzelfde woord, maar bedoelen we er iets anders mee. Dit is enigszins verrassend voor de leerlingen. Laten we dit illustreren in het volgende voorbeeld. Van zodra een orde in $\mathbb{R}$ is besproken, verschijnen de notaties $[a, b]$ en $]a, +\infty[$ en andere vergelijkbare. We kunnen er op twee manieren mee werken:

- We kunnen ze identificeren op een meetkundige manier met delen van de rechte (de getallenas): een interval en een halve rechte;
- Of we kunnen ze beschouwen als deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ gedefinieerd als volgt:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

Hier zijn veel woorden bij nodig. Het symbool $+\infty$ heeft hier als enige betekenis dat het reële getal x willekeurig groot kan worden. $+\infty$ is *geen getal!* Laten we dat in de oren van onze leerlingen knopen. Nochtans zullen we er later in bepaalde contexten vaak mee rekenen, alsof het getallen zijn. Hoe verwarrend toch voor de leerlingen! In sommige handboeken wordt $]a, +\infty[$ genoteerd met ' $]a \rightarrow$ ', waarbij zeker vermeden wordt om $+\infty$ als een getal te beschouwen. Het overwegen waard dus. We denken dat het belangrijk is dat de elementen uit deze paragraaf expliciet worden besproken met de leerlingen.

2.3. Oneindig durende processen

Het begrip 'oneindig' komt, ook in het secundair, verder nog voor in de context van processen die niet stoppen. Dat dit moeilijk te vatten is voor leerlingen mag ons niet verwonderen. Ook in de geschiedenis van de wiskunde hadden grote geleerden het moeilijk met dit aspect.

Laten we dit illustreren aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

In de eerste graad ontdekken de leerlingen dat ze bij een staartdeling van bijvoorbeeld 13 gedeeld door 7 niet tot een exact resultaat kunnen komen. De leerlingen moeten het

deelproces afbreken want de rest is nooit gelijk aan nul. Ze stoppen ergens maar ze beseffen dat dit niet de uitkomst is. Wat is de uitkomst dan wel? We weten hoe ze eruit ziet, we weten dat er een repeterend deel is in het decimaal gedeelte. De theoretische uitkomst bestaat in gedachten maar is niet op te schrijven. Ze bevat oneindig veel decimalen. Dit is het resultaat (de limiet), mochten we het proces inderdaad oneindig lang doorzetten. Het resultaat zelf is niet te vatten. Willen we dit correct beschrijven naar de leerlingen toe, zijn we hen heel veel uitleg verschuldigd... opnieuw: we kunnen zoveel decimalen neerschrijven als we zelf willen, door zoveel stappen in het deelproces uit te voeren als we zelf willen. We zeggen in de wiskunde dat we het aantal stappen van het deelproces 'willekeurig groot' kunnen laten worden. 'Oneindig aantal stappen' heeft hier dus de betekenis van 'een willekeurig groot' aantal stappen. De zakrekenmachine kan deze gedachte ondersteunen. Willen we 6 decimalen visualiseren, dan stellen we de machine zo in dat we 6 decimalen krijgen.

Ook $\sqrt{2}$ heeft een decimale ontwikkeling die niet te vatten is. Onze rekenmachine geeft

$$\sqrt{2}=1,4142135623731...$$

Dit betekent dat $1 < \sqrt{2} < 2$ en $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ en $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ enz. We kennen $\sqrt{2}$ in een willekeurig (groot) aantal decimalen.

Voorbeeld 2

De leerlingen leren in de tweede graad van het secundair de grafiek kennen van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$. Om het asymptotische gedrag te beschrijven gebruiken we op dat ogenblik nog niet de terminologie van limieten, maar toch spreken we in termen van 'als x gaat naar oneindig, dan gaat $f(x)$ naar 0'. En 'als x gaat naar 0, komende van rechts, dan gaat $f(x)$ naar $+\infty$ '. Het begrip oneindig heeft hier totaal niets te maken met het 'oneindig' dat ze eerder ontmoet hebben. We rekenen hier op een natuurlijke intuïtie bij de leerlingen die ze onmogelijk juist hebben kunnen ontwikkelen. Beter is om hier dit asymptotisch gedrag van de functie te omschrijven met woorden zoals 'als x willekeurig groot wordt, dan komt $f(x)$ willekeurig dicht in de buurt van 0' of 'we kunnen $f(x)$ zo dicht bij 0 laten komen als we zelf willen, omdat we x willekeurig groot kunnen kiezen' enz. Uitdrukkingen zoals 'willekeurig klein worden' hebben geen duidelijke boodschap: bedoelen we hiermee 'dichtbij 0

komen' of 'naar $-\infty$ ' gaan? We zijn dus best voorzichtig door deze dubbelzinnigheid.

Samengevat, laten we de leerlingen oefenen om telkens heel duidelijk in woorden te laten omschrijven hoe x en $f(x)$ evolueren. Pas later (in de derde graad) kunnen ze dan hun gedachten bondiger uitdrukken door het woord 'oneindig' te gebruiken, wanneer we zeker zijn dat ze de achterliggende ideeën goed begrepen hebben, dus wanneer het abstractieniveau bereikt is.

Voorbeeld 3

Het getal $0,999 \dots$ blijft voor verrassingen zorgen. Vooraleer dit speciale geval besproken wordt, zijn de leerlingen overtuigd dat het kleiner is dan 1. Nadien wordt hen verklaard dat het gelijk is aan het getal 1. Ze leren dit wel, maar vaak blijven ze 'voelen' dat het kleiner is dan 1. Meer zelfs, de meerderheid van de leerlingen blijft nadien gewoon denken dat het een getal is kleiner dan 1. Ze raken er niet aan gewoon. Soms blijken ze gemakkelijker aan te nemen dat het juist 1 is als je $0,999 \dots$ herschrijft als 3 maal $0,333$, gelijk aan 3 maal $\frac{1}{3}$ en dus 1, of als $1 - 0,000 \dots$

In de derde graad verschijnt het getal opnieuw in de context van meetkundige reeksen: we bespreken er de reeks $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$ die niets meer is dan een andere schrijfwijze voor $0,999 \dots$. Het is goed mogelijk dat sommige leerlingen denken dat deze som willekeurig groot wordt alhoewel de reeks convergeert naar 1. Het Zeno-paradox-fenomeen blijft vaak de bovenhand hebben: een oneindige som hoeft niet noodzakelijk willekeurig groot te worden, maar de leerlingen voelen het niet. Ook hier leren ze de argumenten te begrijpen, maar worden ze het niet gewoon.

We blijven ervan overtuigd dat we deze moeilijkheden in de klas niet uit de weg moeten gaan. We moeten echter als leerkracht heel waakzaam zijn i.v.m. de hardnekkigheid waarmee leerlingen willen redeneren met de logica van het 'eindige'. We kunnen hen alleen maar blijven confronteren met de paradoxen die eruit voortvloeien, net zoals het in de geschiedenis van de wiskunde is verlopen.

3. Kardinaliteit

Alhoewel kardinaliteit (aantal elementen) van een oneindige verzameling helemaal niet op het leerplan staat van het secundair onderwijs, komen we zoals reeds gezegd het begrip vaak onrechtstreeks tegen, zelfs vanaf het eerste jaar van het secundair. Willen we een aspect van 'oneindigheid' op een juiste manier bespreken, dan kunnen we niet zonder een belangrijk begrip uit de verzamelingenleer, nl. het begrip bijectie. In de sterke richtingen van de derde graad van het GO! is dit een leerplandoelstelling, maar dit begrip lijkt reeds veel vroeger in het curriculum nuttig in de wiskundeopbouw. In de volgende paragraaf beschrijven we een heel natuurlijke manier om dit aspect te bespreken, zonder dat we in abstracte, theoretische uitwerkingen vervallen. Dit kan nooit de bedoeling zijn. Sommige opdrachten of klasgesprekken die in deze paragraaf voorgesteld worden, kunnen al van in de eerste graad gebruikt worden.

3.1. Bijecties

In de eerste les getallenleer in het eerste jaar, leren de leerlingen dat een natuurlijk getal een telresultaat is. Dat is precies wat ze als kleuter ook ervaren hebben bij hun eerste noties over getallen: ze tellen (één, twee) twee eendjes in een vijver, 2 appels in een fruitmand, 2 blokjes in de handen... en al die groepjes van 'twee' leiden tenslotte naar het abstracte begrip 'twee', later met het symbool '2' genoteerd. Een telresultaat is een antwoord op de vraag 'Hoeveel?'. Toch kunnen kleine kinderen met een beperkt getalbegrip ook antwoorden op vragen als 'Zijn er meer, minder, evenveel snoepjes in de twee snoepdozen?' zonder telkens de snoepjes te moeten tellen. Hoe doen ze dat? Net zoals wij hieronder in één oogopslag zien dat er evenveel @'s als ©'s staan.

@ @ @ @ @ @ @ @ @ @ @ @
© © © © © © © © © © © ©

We zien de symbolen in paren staan en hoeven dus niet te tellen.

Met elke @ komt er precies één © overeen en omgekeerd.

In het dagelijks leven is 'afparen' heel nuttig, vaak nuttiger dan tellen. Bijvoorbeeld: elke luchthaven krijgt een afzonderlijke lettercode.

AMS → Amsterdam Airport Schiphol (Nederland)

BCN → Barcelona Airport (Spanje)

BKK → Bangkok International Airport (Thailand)

BRU → Brussels Airport (België)

CDG → Parijs Charles de Gaulle International Airport (Frankrijk)

CRL → Brussels South Charleroi Airport (België)

JFK → John F. Kennedy International Airport (New York, Verenigde Staten)

LHR → Londen Heathrow Airport (Verenigd Koninkrijk)

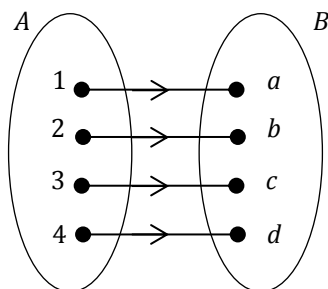
Met elke code komt juist één luchthaven overeen en omgekeerd.

Zo'n verband heeft een naam: er bestaat een *bijectie* tussen de verzameling van luchthavencodes en de verzameling van luchthavens.

We merken op dat het *aantal* codes bijgevolg gelijk is aan het *aantal* luchthavens. Wiskundigen zeggen dan dat beide verzamelingen hetzelfde kardinaalgetal hebben. Voor deze verzamelingen betekent dit gewoon hetzelfde aantal elementen.

Het lijkt ons maar een kleine moeite om bij de aanbreng van de natuurlijke getallen dit afpaarmechanisme, al dan niet met de term 'bijectie', in oefeningen te verwerken. Het mechanisme opent deuren voor later. Denk maar aan de identificatie van de reële getallen met de punten van een geijkte rechte, het associëren van punten in het vlak met hun coördinaten t.o.v. een gegeven assenstelsel, of het feit dat er geen één-één relatie is tussen de reële getallen en hun sinuswaarden bij de opbouw van de definitie van Bgsin...

Alhoewel de volgende voorstelling wat uit de mode is geraakt in het wiskundeonderwijs, blijkt het toch een heel duidelijke grafische taal te zijn om relaties voor te stellen:



Vanuit elk element van A vertrekt juist één pijl en in elk element van B komt juist één pijl toe.

Het afparen is visueel duidelijk en vertaalt een bijectief verband tussen de twee verzamelingen. In de eerste twee graden kunnen we gerust het begrip 'bijectief verband' vertalen door een 'afpaarmechanisme'. In deze tekst gebruiken we de termen 'afparen' of 'bijectief verband' door elkaar. Ze betekenen hetzelfde.

Paradoxen

Talrijke wiskundigen waren in de knoop met een aantal bemerkingen over het aantal elementen van een verzameling.

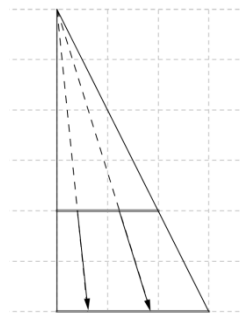
Galilei merkte het volgende op:

0	1	2	3	4	5	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
0	1	4	9	16	25	...	n^2	...

Figuur 2

Elk natuurlijk getal heeft een kwadraat en elk kwadraat is precies het kwadraat van één natuurlijk getal. Dat betekent dat er 'evenveel' kwadraten zijn als natuurlijke getallen. Maar ... er zijn toch nog andere natuurlijke getallen dan kwadraten?

Ook de wiskundige Bolzano worstelde in het begin van de 19^{de} eeuw met dezelfde vragen. Hij besloot dat er verschillende soorten oneindig moeten zijn: de oneindigheid van de reële getallen van een lijnstuk van 2 cm lang moet toch kleiner zijn dan de oneindigheid van de reële getallen van een lijnstuk van 3 cm lang? Nochtans kun je de volgende identificatie maken (zie figuur 3):



Figuur 3

Ofwel werkt het 'afpaarmechanisme' niet voor oneindige verzamelingen, ofwel kun je de omvang van oneindige verzamelingen niet vergelijken op deze manier...?

Deze moeilijke en tegenstrijdige bedenkingen ontstaan ook spontaan bij onze leerlingen, omdat ze begrippen en redeneringen gebruiken die in 'het eindige' van toepassing zijn en deze dan toepassen in situaties die niet 'eindig' zijn.

3.2. Aftelbaar oneindige verzamelingen

Dedekind (19^{de} eeuw) hakte de knoop door en definieerde wat een oneindige verzameling precies is:

Een systeem (verzameling) wordt een oneindige verzameling genoemd, als er een één-één verband (afpaarmechanisme, bijectie) kan gevonden worden met een echt deel van de verzameling. (De verzameling zelf en de lege verzameling worden geen 'echte' delen genoemd).

Voor een eindige verzameling is het onmogelijk om een bijectie te vinden met een echt deel ervan. De voorbeelden die Galilei en Bolzano aanhaalden, voldoen echter wel duidelijk aan deze definitie: de verzameling van natuurlijke getallen is af te paren met de verzameling van de kwadraten en is bijgevolg een oneindige verzameling.

Een heleboel intuïtieve vragen rijzen bij iedereen op die hiermee voor de eerste keer wordt geconfronteerd. En dat is ook het geval bij onze leerlingen.

- Kunnen we zeggen dat alle oneindige verzamelingen hetzelfde aantal elementen hebben?
- Zijn er verschillende soorten oneindig?
- Zijn sommige oneindigheden groter dan andere?
- Zijn die 'oneindigheden' ook getallen?

- Kunnen we rekenen met oneindig?

Cantor (einde 19^{de} eeuw), een vriend van Dedekind, boog zich over deze vragen en definieerde het volgende:

Indien er een bijectie bestaat tussen twee verzamelingen noemen we de verzamelingen vanaf nu 'gelijkmachtig'. 'Aantal' elementen van een verzameling wordt nu vertaald met kardinaliteit van de verzameling.

Alle verzamelingen gelijkmachtig met de verzameling van de natuurlijke getallen worden 'aftelbaar oneindig' genoemd. Ze hebben dezelfde kardinaliteit als de natuurlijke getallen. We noteren deze kardinaliteit met $\aleph_0$, aleph nul. Aleph($\aleph$) is de eerste letter in het Hebreeuws alfabet.

In symbolen: $\#\mathbb{N} = \aleph_0$

De elementen van de aftelbaar oneindige verzamelingen kunnen we dus op een rijtje zetten; daar zorgt de bijectie met $\mathbb{N}$ voor: een element op plaats 0, een element op plaats 1, een element op plaats 2, enz.

Uit het voorbeeld van Galilei begrijpen we zo dat de verzameling van de kwadraten aftelbaar is.

Tijd om andere aftelbare verzamelingen te ontdekken. Wat gebeurt er als we enkele getallen wegnemen uit $\mathbb{N}$, of er oneindig veel wegnemen of toevoegen? Blijft de verzameling aftelbaar oneindig? De leerlingen worden aan het werk gezet. Mits aanpassing van de terminologie (vermijden van woorden als bijectie, gelijkmachtig en kardinaliteit), kunnen deze opdrachten zeker al in de eerste graad. Patronen herkennen behoort daar trouwens tot één van de doelstellingen.

begin lesactiviteit

Aftelbaar oneindige verzamelingen

1. $\mathbb{N}_0$ is de verzameling van de natuurlijke getallen, uitgezonderd 0. Eén element werd dus weggenomen uit $\mathbb{N}$. Zijn er nu minder elementen? Is $\mathbb{N}_0$ nog gelijkmachtig met $\mathbb{N}$? Indien ja, dan kan de onderstaande tabel ingevuld worden om de elementen van $\mathbb{N}_0$ in lijst te brengen. Zie je een algemeen verband? Is het een bijectie?

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...	n	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
$\mathbb{N}_0$	...	...	...	...	...	...	...	

Vul in: $1, 2, 3 \dots (n \rightarrow n + 1)$ Het is een bijectie. Elk natuurlijk getal wordt op zijn opvolger gestuurd. Elk natuurlijk getal $\neq 0$ is het beeld van zijn voorganger.

2. Stel E is de verzameling van alle even natuurlijke getallen en O is de verzameling van de oneven natuurlijke getallen. Toon aan dat beide verzamelingen aftelbaar zijn door de elementen op te lijsten in onderstaande tabellen. Kan je een algemene formule vinden voor de verbanden? Zijn de verbanden wel degelijk bijecties?

$\mathbb{N}$	E	$\mathbb{N}$	O
0	...	0	...
1	...	1	...
2	...	2	...
3	...	3	...
$\vdots$		$\vdots$	
n	...	n	...
$\vdots$		$\vdots$	

$E: (0, 2, 4, 6, \dots) (n \rightarrow 2n); O: (1, 3, 5, 6, \dots)(n \rightarrow 2n + 1)$. Beide verbanden zijn bijectief.

3. We beschouwen nu $\mathbb{Z}$, de verzameling van alle gehele getallen. We hebben dus oneindig veel elementen toegevoegd aan de verzameling van de natuurlijke getallen. De vraag rijst of de kardinaliteit nu wel veranderd is. Denk eraan dat door oneindig veel elementen weg te nemen (probleem 2), we niets gewijzigd hebben aan de kardinaliteit. Het komt er dus op neer om te proberen de gehele getallen in een lijst te plaatsen:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
0	...
1	...
2	...
3	...
4	...
$\vdots$	$\vdots$

Vul in: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots$

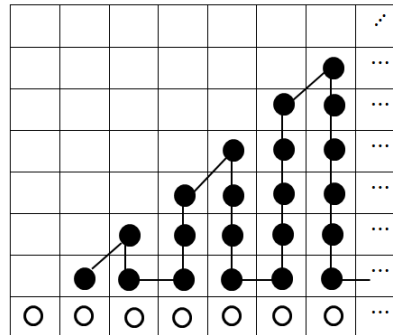
$2n \rightarrow -n$ en $2n+1 \rightarrow n+1$. De even natuurlijke getallen worden afgebeeld op de negatieve gehele getallen en de oneven natuurlijke getallen op de positieve.

4. In de volgende figuur loopt het patroon oneindig door naar rechts. Zijn er meer zwarte of meer witte bolletjes? Bouw een redenering op.

							$\vdots$
						●	...
					●	●	...
				●	●	●	...
			●	●	●	●	...
		●	●	●	●	●	...
	●	●	●	●	●	●	...
○	○	○	○	○	○	○	...

Zowel de zwarte bolletjes als de witte bolletjes bepalen aftelbaar oneindige verzamelingen. We moeten een parcours doorheen het rooster van de zwarte bolletjes realiseren, zo dat ook de zwarte bolletjes op een rij kunnen worden geplaatst, net zoals dat reeds met de witte bolletjes is gebeurd. Het parcours in

onderstaande figuur is een mogelijkheid. Het vertrekpunt is het zwarte bolletje links onderaan. Aangezien beide verzamelingen afbaar zijn met $\mathbb{N}$, zijn ze dus ook onderling afbaar. Ze hebben dus hetzelfde kardinaalgetal. De termen 'evenveel', 'meer' of 'minder' zijn niet meer aangepast.



- Geef minstens drie voorbeelden van verzamelingen die aftelbaar oneindig zijn, maar die op een andere wijze worden opgebouwd.

De verzameling van de priemgetallen; de natuurlijke 4-vouden; alle 5-vouden plus 1.

einde lesactiviteit

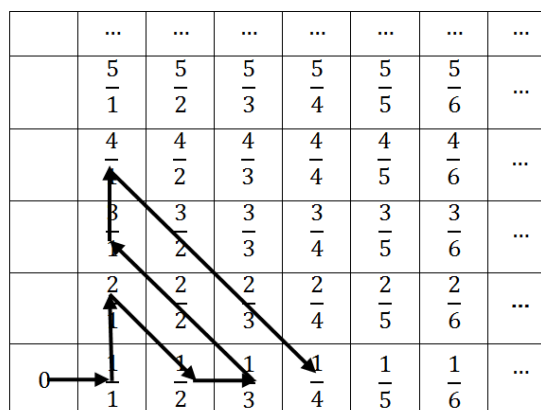
We maken een sprong en vragen ons af of de verzameling van de rationale getallen, $\mathbb{Q}$, ook aftelbaar oneindig is: is het mogelijk om alle rationale getallen op een rij te plaatsen? Velen zullen intuïtief denken dat dit niet lukt. Er zijn immers heel veel rationale getallen: tussen twee rationale getallen kun je bovendien steeds een nieuw rationaal getal vinden (bijvoorbeeld het

gemiddelde van de twee getallen) en bijgevolg zitten er eigenlijk oneindig veel rationale getallen tussen. Zou dit een nieuwe soort van 'oneindig' zijn, groter dan $\aleph_0$? Cantor loste dit probleem op en vond het verrassende resultaat dat $\mathbb{Q}$ eveneens een aftelbaar oneindig verzameling is. We gieten het denkproces van Cantor in een werkdocument.

begin lesactiviteit

Oneindigheid van $\mathbb{Q}$

Cantor had een ingenieus idee om de aftelbaarheid van $\mathbb{Q}$ te bewijzen. Het is zo eenvoudig dat we het bewijs het best visualiseren. In onderstaande figuur zie je een rooster van de positieve rationale getallen waarbij een parcours aangeduid wordt door een gebroken lijn. Het pijltje duidt aan in welke volgorde we de getallen doorlopen.



- Leg uit hoe je uit deze figuur kunt afleiden dat de verzameling van getallen van dit rooster aftelbaar oneindig is.

Start bij het eerste getal aan het begin van de gebroken lijn, links onderaan. Dit getal komt op de eerste plaats van de lijst en wordt dus geassocieerd met 0, het volgende getal wordt geassocieerd met 1, enz. Zo ontstaat er een bijectie tussen de getallen uit het rooster en $\mathbb{N}$.

2. Hebben we hiermee ook bewezen dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is? Welke struikelblokken zijn er?

Er zitten dubbels in; we hebben de negatieve rationalen nog niet beschouwd.

3. Hoe kunnen de gevonden struikelblokken weggewerkt worden zodat de aftelbaarheid van $\mathbb{Q}$ toch op deze manier kan bewezen worden?

Sla de dubbels gewoon over. Eens je de positieve rationalen geordend hebt, kun je de negatieve ertussen ritsen. Na $\frac{1}{1}$ komt $\frac{-1}{1}$, na $\frac{2}{1}$ komt $\frac{-2}{1}$...

einde lesactiviteit

3.3. Overaftelbare verzamelingen

Tot nu toe zijn we maar één soort oneindig tegengekomen. Zowel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar oneindig. We gaan na of de verzameling van de reële getallen ook aftelbaar oneindig is. Cantor

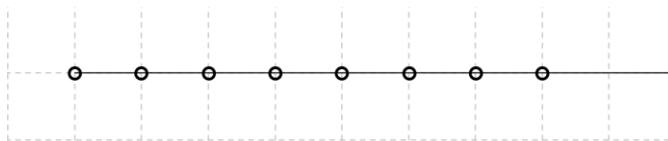
gaf een heel eenvoudig bewijs om te verklaren dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is, het diagonaalbewijs. We kunnen het samen met de leerlingen opbouwen.

begin lesactiviteit

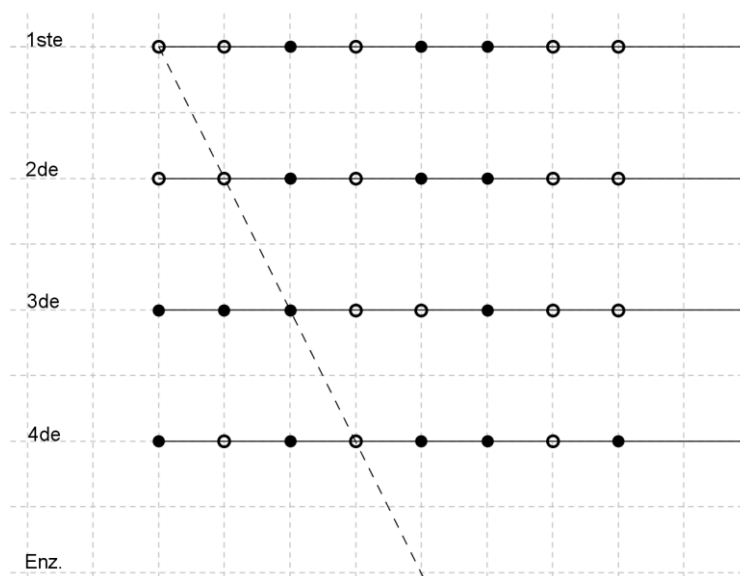
Niet aftelbaar

Beschouw kettingen gemaakt van oneindig veel kralen.

1. Beschouw kettingen gemaakt van oneindig veel kralen.



Stel je mag elke kraal kleuren, maar je beschikt maar over twee kleuren, zwart en wit. Nu beschouwen we alle mogelijke gekleurde kettingen zoals hierboven beschreven. Deze verzameling kan niet aftelbaar zijn. Volg de onderstaande redenering, verklaar elke stap en maak de redenering af.



- a. Stel we kunnen alle bovenstaande kettingen toch in een oneindige lijst rangschikken.

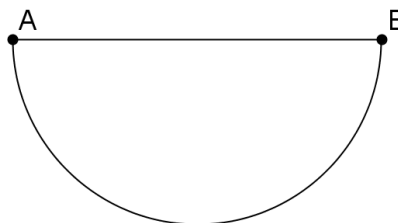
- b. Maak nu een nieuwe ketting als volgt: beschouw de kralen op de stippellijn en verander elke kraal van kleur (wit wordt zwart en omgekeerd). Zo ontstaat er een nieuwe ketting waarvan elke kraal precies de tegenovergestelde kleur heeft als de kralen op de stippellijn.
- c. Leg uit waarom deze ketting nooit in de lijst van alle kettingen kan zitten.
- d. Hoe kun je nu besluiten dat de verzameling van oneindig lange kettingen bestaande uit witte en zwarte kralen niet aftelbaar is?

We voeren eigenlijk een bewijs uit het ongerijmde: stel het kan wel dat alle kettingen in een lijst kunnen geplaatst worden, en bijgevolg een aftelbaar oneindige verzameling zouden bepalen, dan vinden we een contradictie. Mocht een dergelijke lijst bestaan dan blijkt dat er een ketting bestaat die niet in de lijst kan voorkomen, namelijk de ketting gevormd door de kralen met complementaire kleuren van de kralen op de stippellijn. Deze ketting kan niet op de eerste plaats in de rij staan omdat de eerste kraal verschillend is; ze kan niet op de tweede plaats in de lijst voorkomen omdat de tweede kraal verschillend is enz. We kunnen besluiten dat al deze oneindig lange kettingen niet op een rij kunnen geplaatst worden en dus bepalen ze geen aftelbaar oneindige verzameling.

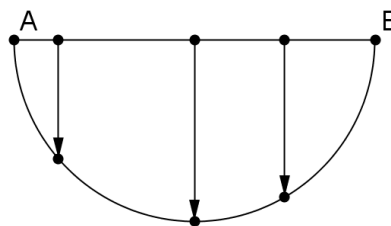
2. Zou je de reële getallen tussen 0 en 1 kunnen identificeren met kettingen met oneindig veel kralen? Hoe? Hoeveel kleuren heb je dan nodig om de kralen te kleuren? Hoe kun je de redenering uit oefening 1 aanpassen om te verklaren dat het interval $]0,1[$ niet aftelbaar is?

De kralen kun je identificeren met de cijfers na de komma van het getal tussen 0 en 1. Elk getal tussen 0 en 1 heeft oneindig veel decimalen als je toelaat dat je bij de getallen met eindige decimale gedeelten oneindig veel nullen toevoegt. De decimalen kunnen 10 waarden aannemen (van 0 tot en met 9) dus we hebben kralen nodig in 10 verschillende kleuren. We passen identiek dezelfde redenering toe: een bewijs uit het ongerijmde. Stel de kettingen kunnen opgelijst worden, dan maken we een ketting die er onmogelijk tussen kan staan. De eerste kraal van de nieuwe ketting is verschillend van de eerste kraal van de eerste ketting in de lijst, de tweede kraal van de ketting is verschillend van de tweede kraal van de tweede ketting uit de lijst, enz, de k^{de} kraal van de ketting is verschillend van de k^{de} kraal van de k^{de} ketting uit de lijst. De nieuwe ketting is dus zo gemaakt dat ze verschillend is van elke ketting uit de lijst.

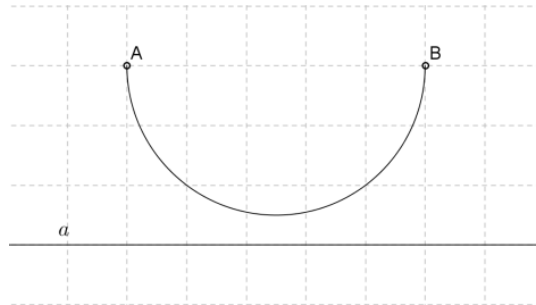
3. Toon aan dat het interval $[AB]$ gelijkmachting is met de onderstaande halve cirkel.



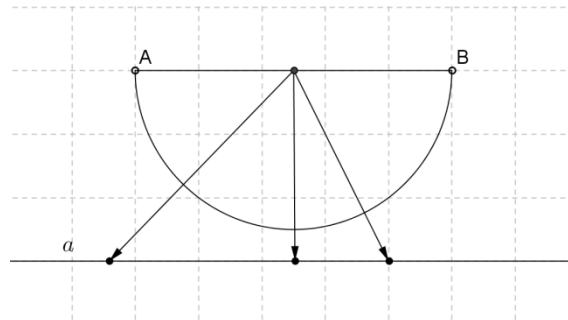
Antwoord: zie de onderstaande tekening.



4. Toon aan dat de halve cirkelboog $\widehat{AB}$, zonder eindpunten, gelijkmachting is met de rechte a .



De eindpunten A en B horen er niet bij. Ze kunnen ook niet op een punt van de rechte gestuurd worden aan de hand van de volgende transformatie.



5. Maak gebruik van de besluiten uit de twee vorige oefeningen om te bewijzen dat de verzameling van reële getallen gelijkmachtig is met elk interval, dus ook met $]0,1[$.

Het interval $]0,1[$ kan geïdentificeerd worden met het lijnstuk $]A,B[$. Het lijnstuk $]A,B[$ kan via de open halve cirkel geïdentificeerd worden met de rechte a . De rechte a kan na ijking geïdentificeerd worden met de verzameling van de reële getallen. De samenstelling van deze identificaties die overigens allemaal bijecties voorstellen, maken dat $]0,1[$ gelijkmachtig is met $\mathbb{R}$.

6. Gebruik oefening 5 om te besluiten dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

Aangezien $]0,1[$ niet aftelbaar oneindig is en $\mathbb{R}$ gelijkmachtig is met $]0,1[$, is $\mathbb{R}$ bijgevolg niet aftelbaar oneindig.

einde lesactiviteit

We hebben nu dus meer dan één soort 'oneindig' ontdekt: aftelbaar oneindig en niet aftelbaar. De kardinaliteit van de natuurlijke getallen is verschillend (kleiner) dan de kardinaliteit van de reële getallen. De vraag die Cantor zich natuurlijk stelde was of er meer soorten oneindig waren dan twee.

Laten we de vraag stellen aan de leerlingen. Ze zullen waarschijnlijk suggereren dat verzamelingen als $\mathbb{Q}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{C}$) wel heel veel elementen hebben. De resultaten zullen verrassend blijven voor de leerlingen: $\mathbb{Q}^2$ is een aftelbare verzameling en $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{C}$) is gelijkmachtig met $\mathbb{R}$.

Cantor bewees echter de onthutsende bewering dat er oneindig veel soorten oneindig bestaan: voor elke soort van oneindig kun je een nieuwe 'grotere' maken. Hij bewees dat de verzameling $\wp(A)$ van alle deelverzamelingen van een verzameling A , steeds een grotere kardinaliteit

moet hebben dan de verzameling zelf, zowel voor een eindige verzameling als voor een oneindige.

4. Hotel van Hilbert

Een uitstekende context om leerlingen van de derde graad voeling te laten krijgen met bepaalde aspecten van het begrip *oneindig* is het *Hotel van Hilbert*. Dit merkwaardige hotel met oneindig veel kamers werd in januari 1924 door David Hilbert (1862-1943) tijdens een lezing gebruikt als gedachte-experiment om allerlei tegenintuïtieve eigenschappen van het aftelbare te verduidelijken. George Gamov beschreef het hotel in 1947 in het boek *One Two Three ... Infinity*. Sindsdien zijn er talrijke varianten op het thema van het oneindige hotel opgenomen in tijdschriften en boeken en verwerkt in digitale animaties.

David Hilbert is vooral bekend voor de 23 belangrijkste wiskundige problemen voor de 20^{ste} eeuw, die hij in het jaar 1900 voorstelde tijdens het internationale wiskundecongres aan de Sorbonne in Parijs. Het eerste probleem gaat over het aantal elementen (of de *kardinaliteit*) van oneindige verzamelingen. Hilbert uitte het vermoeden dat er geen verzameling bestaat waarvan de kardinaliteit ligt tussen de kardinaliteit van de verzameling van de gehele getallen en de kardinaliteit van de verzameling van de reële getallen. Dit vermoeden, de *continuümhypothese*, komt echter niet aan bod in het verhaal van het oneindige hotel.

In de tekst hieronder presenteren we het Hotel van Hilbert in de vorm van een klassikaal leergesprek. De leerlingen maken hierin kennis met twee verschillende oneindigheden: het *aftefelbare oneindig* en het *overaftefelbare oneindig*.

We kiezen ervoor om het leergesprek als één doorlopend verhaal te presenteren en niet in vraag- en antwoordvorm. Het zijn immers geen 'opgaven' die de leerlingen moeten 'oplossen', maar een gesprek dat niet noodzakelijk identiek hoeft te verlopen aan de beschrijving hieronder.

Zoals je zult merken, overlappen de volgende werkteksten soms met eerdere werkteksten voor de tweede graad. Sommige begrippen kunnen immers zowel in de tweede als in de derde graad aan bod komen. Het is niet de bedoeling om deze begrippen twee keer te

bespreken. Het tijdstip van het aanbrengen van de begrippen hangt in grote mate af van de wiskundige rijpheid en de interesse van de klasgroep. Merk op dat de overlappende begrippen in de derde graad op een hoger abstractieniveau aangebracht worden.

4.1. Oneindig veel kamers

Ergens hoog in de Zwitserse Alpen stond ooit een hotel, dat zo erg in trek was dat de zaakvoerder besliste het verder uit te bouwen tot een hotel met oneindig veel kamers. Hij noemde zijn etablissement Hotel Infinity.

Zowel de kamers als de zitplaatsen in de eetzaal waren genummerd: 1, 2, 3 ... Het was een zware investering voor de uitbater. Voor de uitbouw van zijn hotel had hij oneindig veel bedden en meubilair nodig, oneindig veel servies en bestek, oneindig veel keukenpersoneel en kamerdienaars, oneindig veel wijnflessen en braadkippen... Maar deze indrukwekkende investering bleek de moeite waard te zijn.

Op een warme zomerdag, toen het hotel helemaal volgeboekt was, meldten er zich drie trekkers aan die niet op voorhand gereserveerd hadden. De uitbater van het hotel maakte echter geen probleem van de ontvangst van deze onverwachte gasten. Hoe zou hij het aan boord gelegd hebben, denk je, om deze drie trekkers een onderkomen aan te bieden?



Antwoorden

Wellicht opperen de leerlingen om meerdere gasten in één kamer te leggen maar er bestaat een elegantere oplossing die de gasten meer privacy gunt. De directeur van het hotel vraagt aan alle vakantiegangers om hun kamer en hun plaats in de eetzaal in te ruilen voor eentje met een volgnummer dat drie hoger is dan het oorspronkelijke. De bewoner van kamer 11 gaat naar kamer 14, die van kamer 1 gaat naar kamer 4 enz. Zo komen de eerste drie kamers vrij voor de nieuwe gasten.

Didactische tips

Dit deel van het verhaal is de uitgelezen plaats om op te merken dat de oneindig vele kamers, stoelen, bedden, soepborden... in gedachte op een rij kunnen gezet worden en kunnen genummerd worden met natuurlijke getallen. Dit is een merkwaardige eigenschap van de oneindige verzameling van de kamers, van de stoelen, van de bedden en de soepborden in Hotel Infinity. Er zijn ook oneindige verzamelingen waarvan de elementen niet op die manier gelabeld kunnen worden. Dit wordt aangetoond in het laatste hoofdstukje van dit verhaal.

We noemen verzamelingen die wel aan deze eigenschap voldoen (of beter: de kardinaliteit van zulke verzamelingen) *af telbaar oneindig*. Dit aantal wordt kort genoteerd met de Hebreeuwse letter aleph met index nul (of *aleph nul*): $\aleph_0$.

De leerkracht kan nu een belangrijke eigenschap van het aftelbare oneindig intuïtief aanbrengen, nl. $\aleph_0 + 3 = \aleph_0$. Bij uitbreiding kan nu ook ingezien worden dat aftelbaar oneindig plus een positief geheel getal gelijk is aan aftelbaar oneindig: $\aleph_0 + n = \aleph_0$. Later zal deze eigenschap ook geldig blijken te zijn voor ander oneindige kardinaliteiten.

4.2. Oneindig veel onverwachte gasten

Op een dag stopte er een bus met Franse toeristen aan het hotel. Ze hadden er van gehoord dat er niet op voorhand gereserveerd moest worden in Hotel Infinity en hadden dit dus ook niet gedaan. Toen ze aan het onthaal kwamen, vroeg de receptioniste de reisleader met hoeveel ze waren. Hun aantal bleek op het eerste gezicht problematisch te zijn. De bus telde een (aftelbaar) oneindig aantal zitjes en elk zitje was bezet. Dit scenario had zich nog niet eerder voorgedaan in Hotel Infinity.

De receptioniste riep de hulp in van de hoteleigenaar, die ook ditmaal weer met een briljant idee uit de hoek kwam. Welke strategie denk je dat hij zou gevolgd hebben?

Antwoorden

Er bestaat een heldere manier om elke gast in een aparte kamer op te vangen. Vraag eerst aan de oorspronkelijk gasten om te verhuizen naar een kamer met het nummer dat het dubbele is van hun huidige kamernummer. Alle even kamers worden dus bezet door de oorspronkelijke bewoners. De nieuwelingen kunnen dan probleemloos inschuiven op de oneven nummers. De toerist die in de bus op zitje b zat, mag de kamer met kamernummer $2b - 1$ betrekken.

Didactische tips

De leerlingen zullen wellicht verschillende strategieën vinden om alle onverwachte gasten in het hotel te kunnen opvangen. Sommige strategieën zullen discussie uitlokken omdat de hotelgasten niet in een eindig aantal stappen te weten komen in welke kamer ze geherbergd zullen worden. Ook binnen de redactie van *Uitwiskeling* was er controverse over een bepaalde schikking waarbij elke nieuwe gast een willekeurige kamer mocht uitkiezen en de achterliggende bewoners mocht vragen één kamernummer op te schuiven.

Bij deze discussie (en ook bij al de vorige) moet het antwoord 'laat de nieuwkomers aansluiten in de kamer na de laatste gast van Hotel Infinity' duidelijk afgekeurd worden. Het woord 'laatste' heeft geen zin meer bij een aftelbaar oneindige verzameling.

Ook na dit deel van het verhaal kan de leerkracht de essentie samenvatten. Dit hoofdstuk maakt de volgende bewerkingen met oneindige kardinaalgetallen plausibel: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. We kunnen deze bewerking ook noteren als $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ of als $\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{2}$.

Deze laatste uitspraak lijkt nogal paradoxaal. Je kunt ze ook als volgt interpreteren: er zijn evenveel natuurlijke getallen als even getallen. Nochtans lijken er minder even getallen te zijn dan gehele getallen want elk even getal is een natuurlijk getal maar niet elk natuurlijk getal is een even getal. Deze paradox vertoont gelijkenis met de paradox van Galilei, die we vermeldden in paragraaf 3.

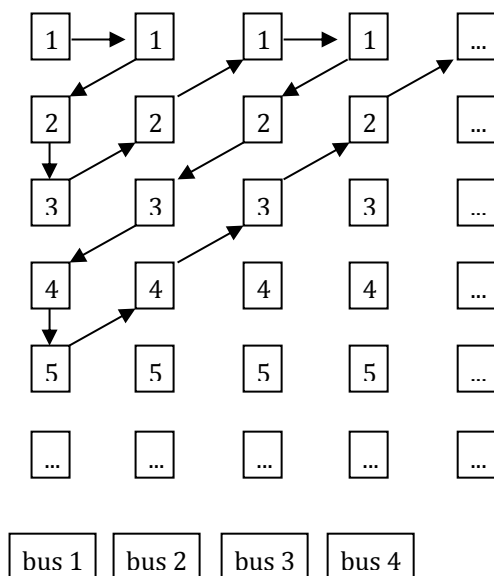
4.3. Oneindig maal oneindig

De gasten in Hotel Infinity begonnen er stilaan tegenop te zien telkens te moeten verhuizen omwille van de toestroom van nieuwe toeristen. Ze vervloekten de inventieve oplossingen voor de overbevolking van de uitbater en hoopten stiekem op een catastrofe waar de inventiviteit van de eigenaar niet tegen opgewassen was.

De verlossing leek bij verrassing al na enkele dagen te komen. Er arriveerde een aftelbaar oneindig lange colonne van bussen met telkens een aftelbaar oneindig aantal zitplaatsen op de parking van het hotel. De bewoners van Hotel Infinity keken monkelend toe en verheugden zich op de slechte afloop van dit verhaal. Maar de manager van het hotel was niet onder de indruk van de oneindig keer oneindig veel nieuwkomers en gaf ze allen onderdak. Hoe denk je dat hij dit probleem oploste?

Antwoorden

Bij deze episode van het verhaal worden de leerlingen werkelijk uitgedaagd originele oplossingen te bedenken. We zullen hier niet verder ingaan op de vondsten van onze eigen leerlingen, die vaak wat moeilijk onder woorden te brengen zijn, maar we stellen hier twee klassieke argumentaties voor die aantonen dat alle toeristen samen in het hotel kunnen. Beide redeneringen zijn staaltjes van creativiteit die de leerlingen niet onthouden kunnen worden.



Figuur 5 De slingerlijn tussen de nieuwkomers

De eerste argumentatie is die van de *slingerlijn*. Vraag aan alle oorspronkelijk gasten om te verhuizen zo dat hun kamernummer verdubbeld is. Alle kamers met oneven nummer komen dan leeg te staan. Laat de Franse toeristen daarna uit de bus stappen en laat hen op evenwijdige rijen plaatsnemen naast hun bussen. De autobussen rijden nu weg. De eerste persoon van de eerste bus steekt de hand uit naar de eerste persoon van de tweede bus. Die steekt op zijn beurt de hand uit naar de tweede persoon van de eerste bus enz. Zo vormen de passagiers van al deze bussen een slingerlijn waarin elkeen een plaats heeft, zie figuur 5. Als de slingerlijn rechtgetrokken wordt, kunnen de nieuwe gasten één na één het hotel binnenwandelen en kunnen ze plaatsnemen in de oneven kamers. In de techniek van de slingerlijn herkennen we het aftelbaarheidsargument van $\mathbb{Q}$ uit paragraaf 3.2.

Een tweede bewijsmethode steunt op de unieke priemontbinding van de natuurlijke getallen. Zo kunnen we bijvoorbeeld het natuurlijke getal 28512 op een unieke manier schrijven als het product $2^5 \cdot 3^4 \cdot 11^1$ van machten van de priemfactoren 2, 3 en 11. De nieuwe strategie bestaat er nu in om de bestaande gasten naar buiten te laten gaan en alle nieuwelingen een kamer toe te wijzen volgens de formule p_n^b , waarbij n het nummer is van het zitje in de bus, p_n het n^{de} priemgetal en b het busnummer. Bijvoorbeeld, de passagier die op de derde plaats zit van de bus met volgnummer zes, zoekt eerst het derde priemgetal ($p_3 = 5$) en verheft dit getal tot de zesde macht ($b = 6$). Zo vindt hij zijn kamernummer: 15625. Deze kamer moet hij met niet delen met een andere gast want het getal 15625 kan maar op één manier geschreven worden als macht van een priemgetal. Uiteraard zullen er grote leegten zijn tussen de kamers van de nieuwkomers. Alleen de kamernummers die een macht zijn van een priemgetal, duiden een kamer aan die bewoond is door een nieuweling. De oorspronkelijke bewoners kunnen nu makkelijk inschuiven in de open plekken tussen de bewoonde kamers.

Didactische tips

Hier vestigt de leerkracht nog eens extra de aandacht op de kerngedachte, nl. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Deze gelijkheid is best verwonderlijk. Er blijken nu immers evenveel natuurlijke getallen te liggen op de getallenlijn als koppels van natuurlijke getallen in het vlak. Nochtans kun je de roosterpunten op een rechte inbeelden als een deelverzameling van de roosterpunten in een vlak.

De leerkracht kan de leerlingen de opdracht geven alternatieve bewijzen op het internet op te zoeken voor de aftelbaarheid van aftelbaar oneindig maal aftelbaar oneindig. Een andere klassieker die snel op wikipedia gevonden wordt, is bijvoorbeeld de interleaving-methode waarbij het kamernummer ontstaat door het busnummer en het zetelnummer cijfersgewijze door elkaar te vlechten, bijvoorbeeld zetelnummer 159 en busnummer 045 geven samen het kamernummer 105495.

Tot hiertoe is het verhaal van Hotel Infinity erg bevattelijk. Het laatste hoofdstuk echter kan je alleen maar kwijt in klassen die redeneer- en taalsterk zijn. Zelf kondig ik de laatste episode (die hooguit tien minuten duurt) wel eens aan als een afvalwedstrijd waarin de leerlingen zo lang mogelijk moeten proberen in het zadel te blijven (en de redenering moeten proberen te volgen). Een beetje zoals een rodeowedstrijd.

4.4. Oneindig veel daklozen

Enkele weken voor kerst waren de bewoners van Hotel Infinity het verhuizen zat. Ze besloten de uitbater een hak te zetten door een aantal nieuwe gasten uit te nodigen dat werkelijk groter was dan het aantal kamers in het hotel.

Alleen zo zou de eigenaar de storende herschikkingen van de kamers misschien stopzetten.

Het plan was ambitieus. De bewoners namen zich voor comités te vormen, zoveel als ook maar mogelijk. Alle denkbare comités van twee personen kwamen aan bod. Maar ook alle comités van acht personen moesten een vergadering houden. En alle mogelijke comités van één persoon enz... Zelfs het lege comité moest vergaderen. Om zeker te zijn dat er genoeg comités waren, werd er beslist dat ook alle mogelijke aftelbaar oneindige comités moesten samenkomen, bijvoorbeeld het comité van de gasten met een kamernummer dat een geheel veelvoud van 7 is.

Elk van deze comités had de opdracht een dakloze van straat te plukken en hem een kerstdiner aan te bieden in het hotel. Daarna moest deze dakloze een kamer in het hotel toegewezen krijgen. Dit waren de spelregels. Het kleinste comité had evenwel een probleem met het kiezen van een dakloze en een kamer voor deze dakloze. Daarom werd overeenkomen dat het lege comité de zieke dakloze zou uitnodigen die gisteren overnachtte in het kerkportaal en dat die zou ondergebracht worden in kamer 1.

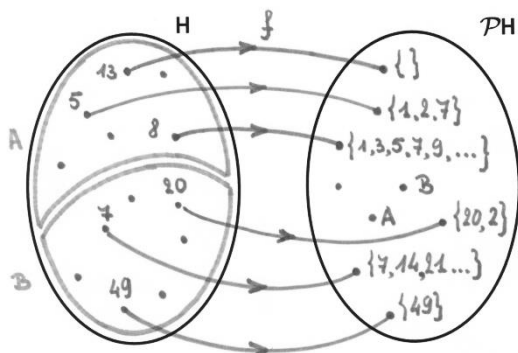


Op deze manier zou het de bewoners vast lukken de hoteleigenaar te slim af te zijn en het hotel uit de voegen te laten barsten. Kun je zelf een redenering opbouwen die aantoonst dat de daklozen met teveel zijn voor het Hotel Infinity?

Antwoorden

Het is erg onwaarschijnlijk dat de leerlingen op eigen houtje kunnen bewijzen dat de daklozen met teveel zijn. Maar het volgen en begrijpen van het bewijs is voor een aantal leerlingen wel haalbaar. Bovendien is het een echter klassieker onder de wiskundige bewijzen. Het is een bewijs uit het ongerijmde.

We stellen dat de daklozen wél in het hotel kunnen worden ondergebracht. Dit leidt tot een contradictie, die pas duidelijk wordt na een moeizame redenering. De verzamelingenleer geeft hierbij een steuntje in de rug. Voor de leerlingen is dit een voorbeeld van de kracht van de abstractie. De context heeft in dit bewijs geen belang meer. De redeneringen die we volgen zijn louter verzamelingtheoretisch.



Figuur 6 H is niet gelijkmachtig met $\mathcal{P}H$.

Noem de verzameling van de hotelbewoners H en de verzameling van de alle comités uit het hotel $\mathcal{P}H$. De notatie $\mathcal{P}H$ wordt in de verzamelingenleer gebruikt voor de machtsverzameling van H (Engels: Power of H , Nederlands: $\mathcal{P}$ van H), dit wil zeggen: de verzameling van alle deelverzamelingen van H . Vanaf nu zullen we de verzameling van alle comités dus beschouwen als de machtsverzameling van H . We moeten bewijzen dat de verzameling H niet gelijkmachtig is met $\mathcal{P}H$.

Stel, uit het ongerijmde, dat de verzameling H wel gelijkmachtig is met de verzameling $\mathcal{P}H$. Dit betekent dat er een bijectie f bestaat van H naar $\mathcal{P}H$. In figuur 6 zie je hier een voorbeeld van. Deze bijectie f is volkomen willekeurig en heeft niets meer met het verhaal van het hotel te maken.

Sommige elementen x van H worden door f afgebeeld op een deelverzameling van H die x bevat. In het voorbeeld hierboven zijn dat de elementen 7, 20, 49, ... Andere elementen x van H worden door f afgebeeld op een deelverzameling van H die x niet omvat. In figuur 3 zijn dit 5, 8, 13, ... Op deze manier wordt de verzameling H in twee klassen onderverdeeld:

$$A = \{x \in H \mid x \notin f(x)\};$$

$$B = \{x \in H \mid x \in f(x)\}.$$

De verzamelingen A en B overdekken H volledig en hebben geen overlapping, m.a.w. elke $x \in H$ behoort precies tot één van beide verzamelingen van de overdekking. In de verzamelingenleer noemen we $\{A, B\}$ een partitie van de verzameling H en noemen we A en B de partitieklassen.

We gebruiken de verzameling A om tot een contradictie te komen. Vermits A tot de verzameling $\mathcal{P}H$ behoort en f een bijectie is van H naar $\mathcal{P}H$, bestaat er een $x \in H$ zo dat $f(x) = A$. Dit element x behoort ofwel tot A ofwel tot B . Hier knelt het schoentje:

- als $x \in A$ dan kunnen we volgens de definitie van A besluiten dat $x \notin f(x)$; omdat $f(x) = A$ volgt hieruit dat $x \notin A$;
- als $x \notin A$ dan is $x \in B$ en dan kunnen we volgens de definitie van B besluiten dat $x \in f(x)$; omdat $f(x) = A$ volgt hieruit dat $x \in A$.

We vatten samen: als $x \in A$ dan $x \notin A$ en als $x \notin A$ dan $x \in A$. Uit deze tegenspraak volgt dat H niet gelijkmachtig is met $\mathcal{P}H$. Er kan geen afparing gebeuren tussen de verschillende comités (of de daklozen) en de bewoner van Hotel Infinity (of de kamers van dit hotel). Het hotel is dus ronduit te klein om alle zwervers onderdak te geven.

Didactische tips

Dit type van redeneringen komt wel vaker voor in de wiskunde, bijvoorbeeld om aan te tonen dat de verzameling van alle verzamelingen niet bestaat. Mocht de verzameling van alle verzamelingen bestaan dan kun je deze verzameling opsplitsen in twee complementaire deelverzamelingen: de verzameling van de verzamelingen die zichzelf wel bevatten en de verzameling van de verzamelingen die zichzelf niet bevatten enz.

Uit de laatste episode van het verhaal van het oneindige hotel kunnen we onthouden dat het

aantal deelverzamelingen van een aftelbaar oneindige verzameling groter is dan aftelbaar oneindig. We noteren dit aantal als $2^{\aleph_0}$ of als $\aleph_1$. Het is niet zo moeilijk aan te tonen dat $\aleph_1$ het kardinaalgetal is van de verzameling $\mathbb{R}$. De notatie $2^{\aleph_0}$ is overgenomen vanuit de eindige verzamelingen. Voor een eindige verzameling A met kardinaalgetal $\#A$ is het aantal deelverzamelingen gelijk aan $2^{\#A}$.

Wat we echter niet kunnen aantonen is dat $\aleph_0$ en $\aleph_1$ de 'kleinste' transfinitie getallen zijn. Niemand kan aantonen dat er tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ nog andere oneindige kardinaalgetallen zitten. Niemand ook kan aantonen dat er tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ geen andere oneindige kardinaalgetallen meer zitten. Deze onbeslisbaarheid is moeilijk te begrijpen voor de gewone wiskundige. Kurt Gödel (1940) en Paul Cohen (1963) brachten de ideeën samen voor het bewijs dat het bestaan van transfinitie getallen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ een onbeslisbare kwestie is binnen de spelregels van de verzamelingenleer.

De zoektocht naar nog grotere kardinaalgetallen stopt niet bij $\aleph_1$. Als we alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ bundelen in een nieuwe verzameling dan heeft deze verzameling weer een hogere kardinaliteit, namelijk $2^{\aleph_1}$ of $\aleph_2$. Op deze manier kunnen we eindeloos doorgaan met het definiëren van nieuwe transfinitie getallen.

Wellicht zal een groot gedeelte van de klas een inspanning geleverd hebben dit verhaal tot het einde toe te kunnen volgen. Bij de leerlingen die onderweg afhaakten, blijft waarschijnlijk wel de fascinatie voor het begrip oneindig hangen. Leerlingen die meer willen weten over dit onderwerp, kunnen doorverwezen worden naar boeiende lectuur zoals Hemmings & Tahta (1995) en Burger & Starbird (2005).

5. Onbepaaldheden

Een andere invalshoek voor het bestuderen van het begrip oneindig situeert zich in de analyse van het vijfde jaar. De leerlingen hebben in het de tweede graad al kennis gemaakt met asymptoten van standaardfuncties (zie ook paragraaf 2.3). Dit is een bewuste opstap naar het invoeren van het begrip oneindig in het vijfde jaar.

Bij deze nieuwe benadering verschijnt oneindig niet meer als een kardinaalgetal maar wel als een limiet van een rij of van een functie. Telkens

wanneer het begrip oneindig in deze context gebruikt wordt, denken we nu aan bijvoorbeeld $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$ of aan $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)$. In deze interpretatie krijgen uitdrukkingen als $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ een heel andere betekenis dan in het verhaal van Hilbert.

Deze gelijkheid betekent nu dat voor willekeurige rijen u_n en v_n geldt dat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty \end{aligned}$$

en dat voor willekeurige reële functies f en g geldt dat :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty. \end{aligned}$$

Deze *dynamische interpretatie* leidt tot rekenregels met $+\infty$ zoals

$$\begin{aligned} (+\infty) + 2 &= (+\infty) \\ (+\infty) + (+\infty) &= (+\infty) \\ 2(+\infty) &= (+\infty) \\ (+\infty) \cdot (+\infty) &= (+\infty) \end{aligned}$$

maar ook tot rekenregels met $-\infty$ zoals

$$\begin{aligned} (-\infty) + 2 &= (-\infty) \\ (-\infty) + (-\infty) &= (-\infty) \\ 2(-\infty) &= (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= (+\infty). \end{aligned}$$

Onbepaaldheden

Heel wat bewerkingen met oneindigheden kunnen niet eenduidig geïnterpreteerd worden vanuit deze nieuwe invalshoek. We denken hier in de eerste plaats aan $(+\infty) - (+\infty)$ en aan $\frac{+\infty}{+\infty}$ maar ook aan de bewerkingen $0 \cdot \infty$, $(+\infty)^0$ en 1^∞ . Hun waarde hangt af van de keuze van de rijen u_n en v_n of van de keuze van de functies f en g . We noemen deze bewerkingen *niet gedefinieerd of onbepaald*.

Om volledig te zijn, merken we op dat er ook nog onbepaalde uitdrukkingen bestaan waarin de oneindige grootheden $+\infty$ en $-\infty$ hun hoofdrol afstaan aan het getal 0. Het zijn de uitdrukkingen $\frac{0}{0}$, 0^0 . De eerste van deze onbepaaldheden is de belangrijkste. Ze duikt op bij alle limietberekeningen van differentiequotienten.

Voor de meeste leerlingen is het zeer moeilijk onbepaaldheden te onderscheiden van bepaaldheden zoals $\frac{0}{\infty}$, $\frac{5}{\infty}$, ∞^1 en 0^∞ . Daarom moeten we voldoende aandacht besteden aan de intuïtieve voorspelling van de mogelijke waarden van allerlei onbepaaldheden (zie verderop). In

een volgende fase moeten de leerlingen ook onbepaaldheden kunnen aantonen via een geschikte keuze van rijen of functies (zie verderop).

Intuïtieve benadering van onbepaaldheden

We focussen ons nu even op de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$. Deze uitdrukking is voorlopig niet gedefinieerd. Telkens wanneer er in het verleden nieuwe getallen werden ingevoerd, werd er over gewaakt dat de rekenregels zo goed mogelijk in overeenstemming waren met bestaande definities en rekenregels. Ook nu moeten we een definitie voor $(+\infty) - (+\infty)$ kiezen die compatibel is met gekende rekenregels. Als je de leerlingen vraagt om een afspraak voor te stellen die hieraan voldoet, kan je ruwweg drie antwoorden verwachten.

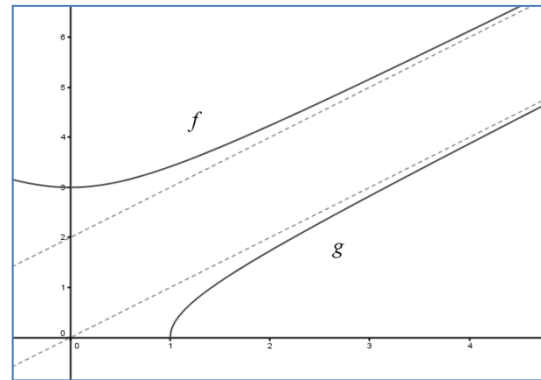
1. Voor een willekeurig reëel getal r geldt dat $r - r = 0$. Als we deze rekenregel uitbreiden naar oneindigheden, zou de afspraak $(+\infty) - (+\infty) = 0$ zeer verantwoord kunnen zijn.
2. De rekenregel $(+\infty) - r = +\infty$, die geldig is voor willekeurige reële getallen r , zou ook uitgebreid kunnen worden naar oneindige getallen. Op deze manier zou de uitdrukking $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$ als nieuwe rekenregel ingevoerd kunnen worden.
3. Een andere rekenregel uit het opgestelde formulairium is $r - (+\infty) = -\infty$. Deze regel geldt enkel voor reële getallen r maar niets belet ons om hem te verbreden naar oneindigheden. Er zijn dus ook argumenten om $(+\infty) - (+\infty) = -\infty$ als nieuwe rekenregel te aanvaarden.

Deze drie voorstellen zijn even waardevol. Bij zulke dilemma's (in dit geval trilemma's) spreken wiskundigen van een onbepaaldheid. Om dubbelzinnigheden te vermijden moet de notatie $(+\infty) - (+\infty)$ binnen berekeningen vermeden worden.

Een andere manier om de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$ te laten aanvoelen is de visuele. Op de afbeeldingen hieronder zie je de grafieken van functies f en g zo dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty.$$

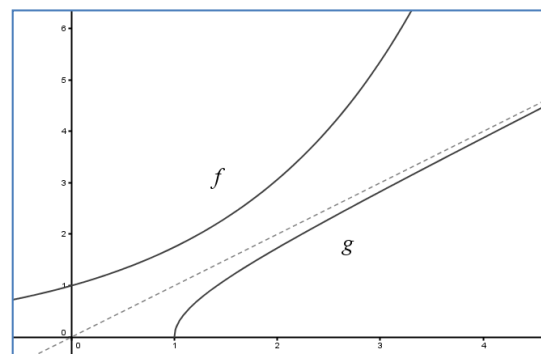
Je kunt de leerlingen vragen welke waarde ze verwachten voor $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ en waarom.



Figuur 7

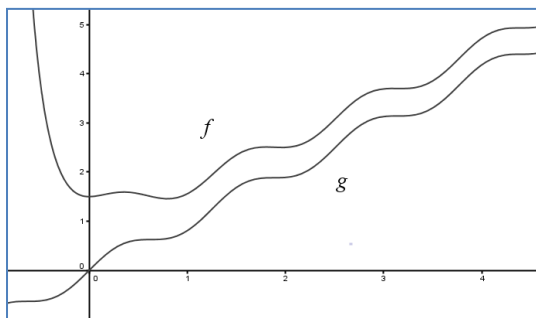
In het voorbeeld van figuur 7 kunnen de leerlingen aflezen dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 2$. Hiervoor kunnen ze de volgende intuïtieve argumenten aanvoeren. Hoe groter de waarde van x wordt, hoe meer de (raaklijnen aan de) grafieken parallel lijken te lopen. De grafieken f en g stijgen na verloop van tijd even snel want de asymptoten van deze twee functies zijn evenwijdig. Deze asymptoten hebben een 'verticale tussenafstand' gelijk aan 2.

In het voorbeeld van figuur 8 kunnen de leerlingen argumenteren dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$ tot de mogelijkheden behoort. De functies f en g gaan beide naar $+\infty$ voor groeiende x -waarden. Maar de grafiek van f stijgt vanaf een bepaalde x -waarde veel sneller dan die van g . Hierdoor zal de 'verticale tussenafstand' tussen beide grafieken oneindig groot worden.



Figuur 8

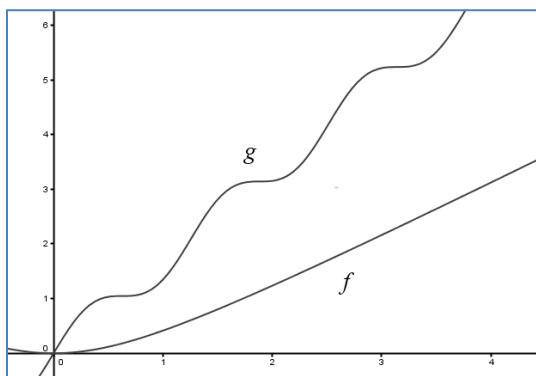
De grafieken van de functies f en g in figuur 9 vertonen geen schuine asymptoten. De beide grafieken gaan wel naar oneindig voor groter wordende x -waarden, zij het op een schommelende wijze.



Figuur 9

Ook in dit voorbeeld kunnen de leerlingen een uitspraak doen over de limiet van de verschilfunctie. De 'verticale tussenafstand' tussen de grafieken lijkt hier stilaan naar een constante waarde te streven. Daarom kunnen de leerlingen in dit geval vermoeden dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ gelijk is aan een constante (in de buurt van 0,5).

Het voorbeeld van figuur 10 heeft iets weg van het tweede voorbeeld. De 'verticale tussenafstand' tussen de beide grafieken wordt oneindig groot. Echter, de rollen van de functies f en g zijn hier omgewisseld. Hierdoor besluiten we dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.



Figuur 10

Een gelijkaardige intuïtieve aanpak kan gevolgd worden voor alle andere onbepaaldheden. Let op bij de onbepaaldheid 1^∞ . De formulering van dit trilemma is iets moeilijker onder woorden te brengen.

Benadering van onbepaaldheden met rijen en functies

Algebraïsch argumenteren dat een bepaalde uitdrukking met oneindigheden onbepaald is, is een vaardigheid die mooi aansluit bij de calculus in de derde graad.

Je kunt best één onbepaaldheid samen met de leerlingen uitwerken, bijvoorbeeld $(+\infty) - (+\infty)$, en de overige onbepaaldheden uitbesteden als werk voor thuis.

Hieronder zie je enkele invullingen van de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$ in het kader van veeltermfuncties. Elke limietberekening heeft een ander resultaat.

1. Beschouw de functies $f(x) = x^2 + 5$ en $g(x) = x^2 + 1$. Door de hoogstegraads-eentermfunctie onder de loep te nemen, vinden we dat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty.$$

De verschilfunctie van deze twee functies is een constante functie: $(f - g)(x) = 4$. In dit voorbeeld is de limiet van de verschilfunctie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f - g)(x) = 4.$$

2. Kiezen we de graden van f en g ongelijk dan krijgen we een ander resultaat. Stel bijvoorbeeld dat $f(x) = x^3 + x^2$ en $g(x) = x^2 + 4$ dan vinden we:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty.$$

De verschilfunctie heeft nu als voorschrift $(f - g)(x) = x^3 - 4$ waaruit we afleiden dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = +\infty.$$

3. Indien we de rollen van f en g omkeren, d.w.z. als $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x^3 + x^2$ dan vinden we nog steeds dat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty.$$

Ditmaal is de functie $(f - g)(x) = -x^3 + 4$. De hoogstegraadsterm leert ons dat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = -\infty.$$

Na dit klassikale voorbeeld is het voor de leerlingen niet erg moeilijk meer om aan te tonen dat $\frac{\infty}{\infty}$ onbepaald is. Ze kunnen opnieuw veeltermfuncties kiezen voor f en g . Door te spelen met de graden van deze veeltermfuncties, vinden ze al snel verschillende limieten voor de quotiëntfunctie $\frac{f}{g}$.

Voor de onbepaaldheid $0 \cdot \infty$ zal wellicht gebruik gemaakt worden van de rationale functie $f(x) = \frac{1}{x}$ die naar 0 gaat voor x naar $+\infty$.

Misschien moet er wel een handje toegestoken worden bij de onbepaaldheid ∞^0 . Goede keuzes

voor de functies f en g kunnen gevonden worden bij de exponentiële functies, vb:

1. $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \frac{2}{x}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^2$
2. $f(x) = 3^{x^2}$ en $g(x) = \frac{1}{x}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^x$
3. $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $f(x)^{g(x)} = 3^{\frac{1}{x}}$.

De onbepaaldheid 1^∞ geeft de leerkracht de mogelijkheid de leerlingen kennis te laten maken met het getal e , dat hier als een limiet geïntroduceerd wordt. In de onderstaande voorbeelden zullen algebraïsche technieken vaak niet meer volstaan om de limiet te berekenen. Een numerieke benadering met de zakrekenmachine is hier aangewezen. Alleen het derde voorbeeld hieronder kan uitgewerkt worden zonder gebruik te maken van de zakrekenmachine.

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en $g(x) = x$ met $f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
2. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en $g(x) = 2x$ met $f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$
3. $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ en $g(x) = 2x$ met $f(x)^{g(x)} = 3^2$.

Het kan geenszins de bedoeling zijn dat de leerlingen deze voorbeelden uit het hoofd leren. Het doel is wel de inventiviteit en het inzicht van de leerlingen te prikkelen, zo dat ze zelf in staat zouden zijn snel onderscheid te maken tussen bepaaldheden en onbepaaldheden.

Onbepaaldheden omzeilen via gepaste limiettechnieken

Bij de berekening van limieten komt het vaak voor dat leerlingen het werk stopzetten wanneer ze op een onbepaaldheid stuiten. Ze zijn er zich dan te weinig van bewust dat deze limiet wel bestaat maar dat er nader onderzoek nodig is om uit de onbepaaldheid te geraken. Er bestaat bij het berekenen van limieten niet zoiets als onbeslisbaarheid. Onbepaaldheden kunnen omzeild worden door gepaste rekentechnieken.

Bij een eerste kennismaking moeten de leerlingen er attent op worden gemaakt dat het arsenaal aan technieken om onbepaaldheden te omzeilen enorm groot is. Tot enkele decennia geleden was het een expliciete doelstelling binnen de analyse om deze technieken zo goed mogelijk te beheersen. Nu kunnen limieten algebraïsch berekend worden door CAS-rekenmachines en computerprogramma's. Toch

is het zinvol om van bij de start enkele voorbeelden te geven van een limietberekening waarbij wat meer inventiviteit nodig is om een onbepaaldheid te omzeilen, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x+10)(\sqrt{x-1} + 3)}{(\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{x-1} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x+10)(\sqrt{x-1} + 3)}{(x-10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} (x+10)(\sqrt{x-1} + 3) \\ &= 120 \end{aligned}$$

Een ander misverstand bij limietberekeningen is dat leerlingen niet de limiet van de hele functie ineens berekenen maar dat ze een deel van de functie voortrekken bij de limietberekening. Als in het vorige voorbeeld de teller voorgetrokken wordt, loopt het bijvoorbeeld slecht af zoals in de volgende berekening.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{100 - 100}{\sqrt{x-1} - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Oneindige sommen en oneigenlijke integralen

In de derde graad komen er nog verschillende andere contexten aan bod waarbij het begrip oneindig tegenintuïtieve reacties uitlokt. Ook hier moet bijzondere zorg besteed worden aan een goede interpretatie van het begrip oneindig.

6.1. Oneindige sommen

De oude Grieken hadden het er moeilijk mee te aanvaarden dat een oneindige som van positieve getallen eindig kon zijn. Dit is onder andere de kern van de paradoxen van Zeno.

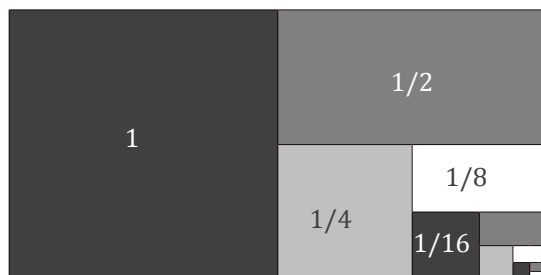
In het vijfde jaar maken de leerlingen kennis met de som van rekenkundige en meetkundige rijen. De somformule voor n opeenvolgende termen van een meetkundig rij

$$s_n = t_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

toont aan dat de meetkundige reeks (of de rij van de partiële sommen) convergeert. Dit wil

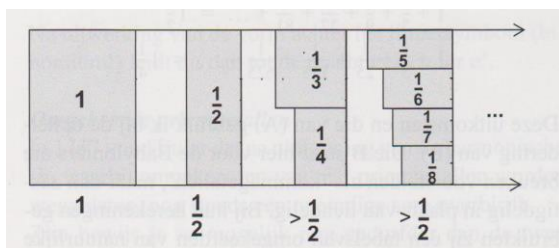
zeggen dat s_∞ een eindig getal is, als en slechts als de reden q tot het interval $]-1, 1[$ behoort. Op deze manier wordt de klassieke overtuiging dat 'de som van oneindig veel positieve getallen oneindig is' duidelijk tegengesproken.

Dat de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ een eindige som heeft, kun je ook makkelijk op een meetkundige manier inzien door tegels en delen van tegels samen te leggen. Als je alle oppervlakten van de tegels in figuur 11 bij elkaar telt, zal de oppervlakte van twee tegels niet overschreden worden.



Figuur 11 Totale oppervlakte kleiner dan twee tegels

Een andere rij waarvan de oneindige som soms tot misverstanden leidt, is de harmonische rij. Nicolas Oresme (1323-1382) toonde al in de veertiende eeuw aan dat de bijbehorende reeks (of de rij van de partieelsommen) divergeert. Dit wil zeggen dat de oneindige som s_∞ van de termen van de harmonische rij oneindig is. Ook van dit bewijs kunnen we een meetkundige visualisatie geven, zie figuur 12.



Figuur 12 Totale oppervlakte oneindig groot

Deze twee reeksen, de convergerende meetkundige reeks en de divergerende harmonische reeks, zouden tot de standaardkennis van heel wat leerlingen moeten behoren. We hoeven in deze gevallen zelfs geen zware wiskunde in te zetten om de convergentie en divergentie aan te tonen.

Voor heel wat andere reeksen is het minder evident te kunnen voorspellen of er convergentie of divergentie is. Laten we de proef op de som nemen. Wat denk je zelf van de volgende reeksen? Welke uitdunning van de

harmonische reeks convergeert? Welke divergeert?

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \dots$
2. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \dots$
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \dots$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \dots$

Neem even de tijd om hierover na te denken, beste lezer. De eerste reeks bevat de omgekeerden van de driehoeksgetallen, de tweede reeks bestaat uit de omgekeerden van de kwadraten, reeks drie heeft de faculteiten van natuurlijke getallen in de noemers en reeks vier de priemgetallen.

Zonder in te gaan op bewijzen, geven we hieronder een kort antwoord op deze vraag. Wil je meer weten over uitdunningen van harmonische reeksen dan verwijzen we naar Kindt (2008).

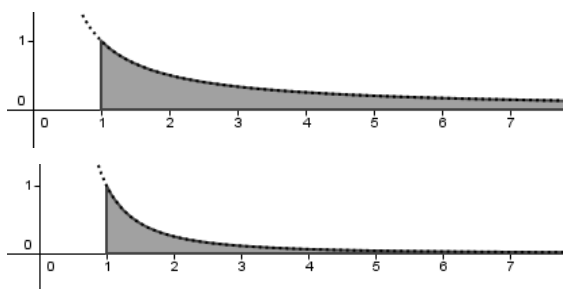
De reeks van de reciproken (omgekeerden) van de driehoeksgetallen is genoeg uitgedund om te convergeren. Ook de reeks van de reciproken van de kwadraten convergeert. Het is makkelijk aan te tonen dat deze reeks convergeert (de rij van de kwadraten wordt immers gemajoreerd door de rij van de driehoeksgetallen) maar het is veel moeilijker om aan te tonen naar welk getal ze convergeert. Het was Euler die als eerste aantoonde dat deze oneindige som gelijk is aan $\frac{\pi^2}{6}$. In het vorige nummer van Uitwiskeling gaven we hier een bewijs van, in de bespreking van Aigner & Ziegler (2013). De reeks met de reciproken van de faculteiten is ook voldoende uitgedund. Ze convergeert naar $e - 1$. Maar de reeks met de omgekeerden van de priemgetallen is niet voldoende uitgedund. Je zou in dit opzicht kunnen zeggen dat er meer priemgetallen zijn in de hoge regionen dan kwadraten, driehoeksgetallen of faculteiten. De vierde reeks divergeert dus. Als je van de priemgetallen alleen de priemtwelingen overhoudt dan is de reeks opnieuw voldoende uitgedund om te convergeren. Deze zeer merkwaardige vondst werd pas in 1919 bewezen (door de Noorse wiskundige Viggo Brun). De reeks convergeert naar de constante 1,902160583104 ... die sinds de ontdekking de naam van de constante van Brun draagt.

De moeilijke voorspelbaarheid van de convergentie van sommen zet zich door naar continue sommen of integralen.

6.2. Oneigenlijke integralen

Het is bekend dat integralen van functies over een oneindig domein soms een eindige waarde hebben. Dit houdt verband met wat we ontdekten over oneindige sommen.

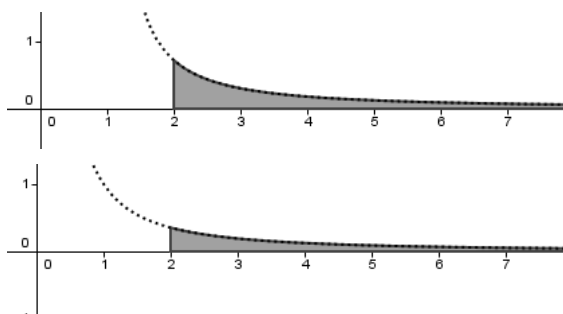
De convergentie van oneigenlijke integralen is geen verplichte leerstof. Als je de grafiek van een functie met de x -as als horizontale asymptoot bekijkt, kun je je intuïtie laten oordelen over de convergentie van de oneigenlijke integraal. Grafieken met een 'zwarte staart' hebben een divergerende oneigenlijke integraal, functies met een 'lichte staart' hebben een convergerende integraal. De begrippen 'zwarte staart' en 'lichte staart' worden ook gebruikt in de statistiek.



Figuur 13 Dikke en slanke staarten

In figuur 13 zien we de grafieken van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ (zwarte staart) en van de functie $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (lichte staart). Bij de eerste functie zal de integraal over het interval $[1, +\infty[$ divergeren. Bij de tweede functie convergeert de integraal naar 1. Dit is volstrekt in de lijn van de sommen van de rijen: de rij $u_n = \frac{1}{n}$ divergeert, de rij $v_n = \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Het is een leuke oefening om het gebied tussen de zwarte en de lichte staarten af te tasten. Wat denk je bijvoorbeeld van de functies $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ en $g(x) = \frac{1}{x \sqrt{x}}$, zie figuur 14. Gebruik voor deze oefening bij voorkeur een integratie over het interval $[2, +\infty[$. Stemt je berekening overeen met je intuïtie?



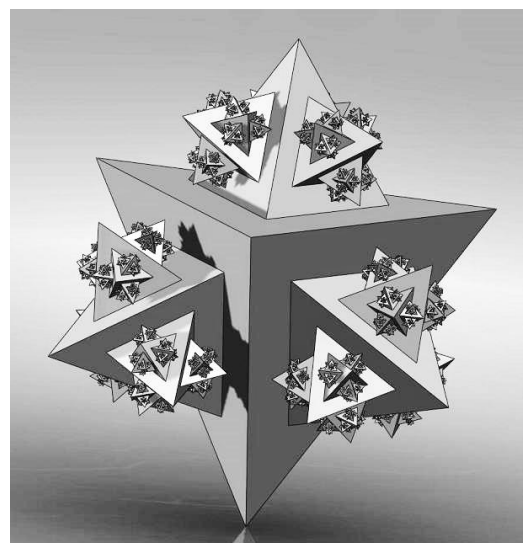
Figuur 14 Opnieuw zwarte en lichte staarten

6.3. De trompet van Torricelli

Mocht je op het einde van het zesde jaar nog een keer terug willen komen op het begrip oneindig en op de schijnbare paradoxen die dit begrip met zich meebrengt, dan moet je het zeker hebben over verschijnselen zoals de trompet van Torricelli, zie ook Uitwiskeling 7/1, 4-15.

Als je aan de leerlingen vraagt of het mogelijk is met een vlies met een eindige oppervlakte een oneindige inhoud af te bakenen dan antwoorden ze vast negatief. Ze denken dan misschien aan het bolvormige zeepvlies, dat er om bekend staat met een vaste oppervlakte een maximaal volume aan lucht te omspannen. En dat is een goede redenering. De bol is het lichaam met de grootste inhoud voor een vaste oppervlakte of anders uitgedrukt met de kleinste oppervlakte voor een vaste inhoud.

Als je de leerlingen vervolgens vraagt of er lichamen bestaan met een eindige inhoud en een oneindige oppervlakte, blijft het meestal stil in de klas. Best te begrijpen: deze lichamen liggen niet zomaar voor het rapen. De meest bekende voorbeelden van deze lichamen vind je bij de fractalen. Hieronder zie je bijvoorbeeld de planeet van Koch (zie Sweeny, 2008), een lichaam dat bestaat uit een tetraëder waarop 4 kleinere tetraëders gekleefd zijn, waarop telkens weer 3 kleinere tetraëders gekleefd zijn enz. De figuur is zodanig opgebouwd dat ze zelfgelijkvormig is. Dit betekent dat, wanneer je een klein pinakeltje van deze constructie afbreekt en wanneer je dit vergroot, je in essentie het oorspronkelijke lichaam terug krijgt.



Figuur 15 De planeet van Koch

Op het internet vind je talrijke grafische ontwerpen van driedimensionale zelfgelijkvormige lichamen. We noemen zelfgelijkvormige objecten fractalen.

De fractaal die je in figuur 15 'ziet' heeft een eindige inhoud en een oneindige oppervlakte. Het werkwoord 'zien' is hier misschien wat kort door de bocht. De afbeelding toont slechts tetraëders van acht verschillende formaten. De echte planeet van Koch heeft oneindig veel verschillende afmetingen van tetraëders. Je kunt je de volledige fractaal wel inbeelden maar je kunt hem niet afbeelden.

Een even gek object als de planeet van Koch is de trompet van Torricelli (1608-1647), genoemd naar de uitvinder van de barometer, Evangelista Torricelli. Een andere naam voor deze trompet is de hoorn van Gabriël. De aartsengel Gabriël blies hierop op de Dag des Oordeels en maakte hiermee een symbolische link van het eindige naar het oneindige, van het aardse naar het goddelijke. De moderne leerling zal het object van figuur 16 eerder een 'vuvuzela' noemen.

De trompet van Torricelli ontstaat door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ te laten wentelen om de x -as voor $x \in [1, +\infty[$. Op het eerste gezicht lijkt de oneindig lange bazuin, die zo ontstaat, niet veel gemeen te hebben met de planeet van Koch.

Maar als je dieper doordenkt, zie je toch een gelijkenis: de trompet van Torricelli is een fractaal. Geen gekartelde, zoals je ze meestal aantreft, maar een gladde. Als je een deel van de trompet bekijkt, bijvoorbeeld het gedeelte waarvoor $x \in [2, +\infty[$ dan kan dit uiteinde affien afgebeeld worden op de hele trompet.

Verrassend wordt het echter wanneer je de oppervlakte en de inhoud van deze bazuin

berekent. De inhoud is vrij eenvoudig:

$$I = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p \pi \cdot f^2(x) dx$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\pi}{x} \right]_1^p = \pi$$

Als we als lengte-eenheid de dm nemen, betekent dit dat je de hele trompet kunt vullen met iets meer dan 3 liter vloeistof. De vloeistof zit dan zo diep in de trompet als je je maar kan inbeelden.

Voor de berekening van de oppervlakte is wat meer vastberadenheid nodig. De integraal die je hiervoor moet berekenen is:

$$A = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4} dx.$$

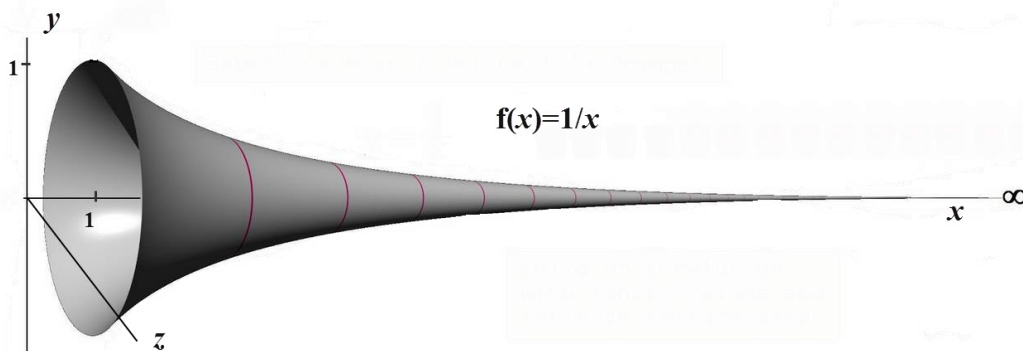
Deze integraal is niet geschikt om manueel berekend te worden. Je kunt je leerlingen wel laten berekenen dat:

$$D \left(\pi \left(\ln(\sqrt{1 + x^4} + x^2) - \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^2} \right) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4}.$$

Met deze primitieve functie kunnen ze aan de slag om de oppervlakte van de trompet te berekenen. Goed geraden: het resultaat is oneindig.

Ben je niet zo'n fan van zware integraalberekeningen dan bestaat er een geraffineerde sluipteg:



Figuur 16 De trompet van Torricelli

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \\
 &> \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p 2\pi f(x) dx \\
 &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p \frac{2\pi}{x} dx
 \end{aligned}$$

waarbij deze laatste integraal naar oneindig gaat omwille van een functie met een te zware staart. De oppervlakte-integraal is bijgevolg ook gelijk aan oneindig.

Deze berekeningen vragen om een luchtige ontknoping in de klas. Je vertelt de leerlingen dat, als je deze trompet aan de binnenkant en aan de buitenkant zou willen schilderen, je oneindig veel potten verf nodig hebt. Een dure aangelegenheid dus.

Daarna vertel je hen dat je een listige manier ontdekt hebt om de trompet toch te kunnen schilderen met een eindig aantal potten verf, binnen een eindig aantal werkuren met een eindig aantal klusjesmannen. Meer nog, je zal zelfs maar zes literpotten verf nodig hebben plus een klein likje.

7. Namijmeren over grote getallen en relevantie van het begrip oneindig

Doe de test: vraag iemand om het begrip 'oneindig' in een zin te plaatsen en negen keer op tien wordt er gezegd "het heelal is oneindig". En dan bedoelt men eigenlijk "er komt geen einde aan, het is onbegrensd". Het voorbeeld is heel

treffend, omdat men in de geschiedenis van de wetenschap hierover al heel lang gefilosofeerd heeft. Wetenschappelijk onderzoek is er echter nog steeds niet uit.

Aristoteles had het over potentiële oneindigheden en feitelijke oneindigheden. Met de idee van de eerste soort zijn we enigszins vertrouwd: we kennen voorbeelden zoals de lijst van natuurlijke getallen 1, 2, 3, ... die nooit eindigt, of we kunnen ons inbeelden dat sommigen dromen van 'onbeperkt reizen in een ruimteschip doorheen een oneindige ruimte'; de reis stopt niet. Het 'oneindige' wordt hier nooit volledig ervaren, het is potentieel. De tweede soort is moeilijker: is er bijvoorbeeld in de natuur iets 'meetbaar oneindig' op een bepaalde plaats, of op een bepaald ogenblik? Dit is een heel natuurlijke vraag, ook bij leerlingen. Komt 'oneindig' voor in de realiteit? Volgens Aristoteles was dat onmogelijk. Wat volgt is geen diepgaande uitwerking van mogelijke theorieën, waarvoor wij (auteurs) trouwens geen expertise hebben, noch een onderbouwde filosofische verhandeling. We geven enkele voorbeelden die eerder bedoeld zijn voor het geval er in de klas een aanzet gegeven wordt, of om domeinen buiten de wiskunde even te betreden. Laten we de leerlingen duidelijk maken dat er nog veel onzekerheden zijn, en dat zinnen zoals 'het heelal is oneindig' voorlopig geen wetenschappelijke waarheid inhoudt. Bovendien is die zin heel ruim. Bedoelen we dat het aantal atomen oneindig groot is (het kardinale aspect), of dat we willekeurig ver kunnen reizen in de ruimte?

Enkele voorbeelden:

- In de natuurkunde gebeurt het dat je in theoretische berekeningen 'oneindig'



uitkomt, maar dan gaat het steeds over resultaten die verkregen worden door het verwaarlozen van een aantal beginsituaties.

- Einsteins theorie van algemene relativiteit geeft aan dat het uitdijend heelal gestart is in een eindig verleden, ongeveer 14 miljard jaar geleden, toen de densiteit ervan oneindig groot was. Dit kennen we onder de 'Big Bang'-theorie. Einstein berekende ook dat in het centrum van een zwart gat een oneindige densiteit van materie zou bestaan. Sommige wetenschappers beweren echter dat dit artefacten zijn in een evoluerende wetenschap. Mochten de fenomenen bestaan, zijn ze zeker niet observeerbaar omdat de zwarte gaten alle licht absorberen.
- We komen terug op onze startzin i. v. m. de mogelijke ruimtelijke oneindigheid van het heelal. Indien dit niet zo zou zijn, dan rijzen er onmiddellijk nieuwe vragen: zou dit dan willen zeggen dat de ruimte een rand heeft, of, wat ligt er dan buiten de grenzen? We kunnen ons echter wel meetkundige modellen inbeelden, zoals een sfeer, die wel degelijk een eindige oppervlakte hebben, maar die toch geen rand hebben. Einstein gaf aan dat de meetkundige vorm van de ruimte trouwens afhankelijk is van de dichtheid van de materie die het bevat (een beetje zoals een voorwerp plaatsen op een rubberen trampoline). Daardoor is het niet duidelijk wat de vorm van de ruimte precies is en of ze al dan niet onbegrensd is.
- Is het aantal deeltjes in het heelal dan een oneindige verzameling? Het aantal atomen wordt echter naar verluid geschat tussen de 10^{78} en 10^{85} . Zeer grote getallen dus, maar voorlopig niet 'oneindig groot'.

We begeven ons op gevaarlijk terrein: een foute identificatie van heel grote getallen met het begrip 'oneindig'. Als we tijd nemen om te filosoferen over 'oneindig' is het even zinvol om ons even te buigen over het nut van 'grote' getallen.

- Een googol is een enorm groot getal (10^{100}): een 1 gevolgd door 100 nullen. Het is een getal dat in de wiskunde en andere wetenschappen vaak opduikt als vergelijkingspunt: het is bijvoorbeeld groter dan het aantal deeltjes in het heelal... Op zich heeft het geen nut. Het is echter nog te bevatten; we kunnen het zelfs neerschrijven.

- Een googolplex is (10^{googol}) is eveneens een getal dat opduikt in de wiskunde als nieuw referentiepunt; het is bijvoorbeeld groter dan het grootste priemgetal dat recent ontdekt is: het 48ste Mercenne-priemgetal is $2^{57885161} - 1$, een getal met 17425170 cijfers. Grote priemgetallen hebben hun nut onder andere in de codetheorie.
- Het Graham-getal is het grootste getal dat tot op heden in een wiskundige redenering gebruikt is geworden. Het is een natuurlijk getal groter dan de googolplex. Er is in het ganse universum onvoldoende materie aanwezig om dit getal te kunnen neerschrijven. Erger nog, we kennen de cijfers niet: het is een geheel getal, deelbaar door 3 en eindigend op een 7. Veel concreter kunnen we het niet beschrijven. Toch heeft het een zinvolle betekenis, omdat het gebruikt is geworden in een wiskundige redenering. Grotere getallen bestaan theoretisch natuurlijk wel, maar hun nut in de realiteit moet nog blijken.

We willen met dit laatste hoofdstuk Vlaanderen niet aanzetten om te filosoferen over het begrip 'oneindig'. We beogen alleen maar dat indien leerlingen tijdens de lessen wiskunde filosofische uitspraken maken en die uitspraken zouden beschouwen als wetenschappelijke feiten, we erop kunnen wijzen dat de wetenschap op vele vlakken nog open ligt. Het theoretische aspect van 'oneindig' in wiskundige uitwerkingen is echter wel relevant. Bovendien: heel grote getallen en 'oneindig' is niet hetzelfde.

Slotbeschouwing

Het begrip 'oneindig' heeft verschillende facetten, die we dagelijks in onze wiskundelessen tegenkomen. Die verschillende betekenissen kunnen heel verwarrend zijn voor de leerlingen. 'Oneindig binnen wiskunde' heeft ook weinig te maken met het woordgebruik in onze dagelijkse taal. Het is in deze loep niet de bedoeling geweest om 'oneindig' als een leerdoel op zich te beschouwen, maar eerder om aan te sporen om de gelegenheden te benutten om misconcepties en spraakverwarringen te vermijden. Die gelegenheden zijn talrijk. Wie echter ruimte heeft om er wat dieper op in te gaan, kan gebruik maken van de opdrachttjes.

Bronnen

- Aigner, M., Ziegler, G. (2013). *Raisonnements divins*, Springer-Verlag, France, 49-55.
- Barrow, J.D. (2005). *The infinite book*. London: Vintage books.
- Barrow, J.D. (2012). *Does infinity exist?* Geraadpleegd 11.11.2014.
<http://plus.maths.org/content/does-infinity-exist>
- BBC. (2010). *To infinity and beyond*. Horizon (film).
- Burger, E.B., Starbird M. (2005). *The Heart of Mathematics*. Key College Publishing.
- Freiberger, M., Thomas, R. (2013). *Do infinity exist in nature?* Geraadpleegd 11.11.2014.
<http://plus.maths.org/content/do-infinities-exist-nature-0>
- Freiberger M., Thomas R. (2014). *Too big to write but not too big for Graham*. Geraadpleegd 11.11.2014.
<http://plus.maths.org/content/too-big-write-not-too-big-graham>
- Hemmings R., Tahta D. (1995). *Images of Infinity*, Stradbroke, Norfolk: Tarquin Publications.
- Kindt M. (2008). *Wat 40 keer te bewijzen is*. Freudenthal Instituut, Utrecht, 79-81
- Lamua A. (2013). *Het boek der oneindigheid*. Kerkdriel: Librero b.v.
- Mastin, L. (2009). *The physics of the universe*. Geraadpleegd 11.11.2014.
<http://www.physicsoftheuniverse.com/numbers.html>
- Sweeney J. (2008). *3D Koch Snowflake*. Geraadpleegd 11.11.2014.
<http://blog.3dvision.com/2008/10/30/3d-koch-snowflake/>
- Van den Broek L., van Rooij A. (2007). *Blik op oneindig*. Zebra-reeks. Utrecht: Epsilon Uitgaven.