

**verzamelingen en structuren**

academiejaar 2017-2018

bachelor secundair onderwijs

semester 1

auteur: H. Vandepitte – medeauteur + LECTOR: K. Schedin

Inhoud

[1 Getallenverzamelingen 1](#_Toc501278281)

[1.1 Opbouw van de natuurlijke getallen 1](#_Toc501278282)

[1.1.1 Opbouw vanuit de verzamelingenleer 1](#_Toc501278283)

[1.1.2 Opbouw m.b.v. De axioma’s van Peano 2](#_Toc501278284)

[1.2 Bewerkingen met natuurlijke getallen 2](#_Toc501278285)

[1.2.1 Optelling 2](#_Toc501278286)

[1.2.2 Aftrekking 3](#_Toc501278287)

[1.2.3 Vermenigvuldiging 3](#_Toc501278288)

[1.2.4 Deling 4](#_Toc501278289)

[1.3 Oneindig 4](#_Toc501278290)

[1.4 Uitbreiding naar andere getallenverzamelingen 4](#_Toc501278291)

[1.4.1 De natuurlijke getallen 4](#_Toc501278292)

[1.4.2 De gehele getallen 4](#_Toc501278293)

[1.4.3 De rationale getallen 5](#_Toc501278294)

[1.4.4 De reële getallen 6](#_Toc501278295)

[1.5 Samengevat 6](#_Toc501278296)

[1.5.1 Voorstelling van de getallenverzamelingen met Venn-diagrammen 6](#_Toc501278297)

[1.5.2 De meest nauwkeurige benaming voor een getal bepalen 6](#_Toc501278298)

[1.5.3 De verzameling bepalen waartoe een getal behoort 7](#_Toc501278299)

[1.6 Oefeningen 8](#_Toc501278300)

[2 structuren 17](#_Toc501278301)

[2.1 Eigenschappen van bewerkingen 17](#_Toc501278302)

[2.1.1 Inwendig en overal gedefinieerd 17](#_Toc501278303)

[2.1.2 Commutativiteit 17](#_Toc501278304)

[2.1.3 Associativiteit 17](#_Toc501278305)

[2.1.4 Neutraal element 17](#_Toc501278306)

[2.1.5 Symmetrisch element 17](#_Toc501278307)

[2.1.6 Opslorpend element 18](#_Toc501278308)

[2.1.7 Distributiviteit 18](#_Toc501278309)

[2.2 Structuren 18](#_Toc501278310)

[2.2.1 Structuur 18](#_Toc501278311)

[2.2.2 Monoïde 18](#_Toc501278312)

[2.2.3 Groep 18](#_Toc501278313)

[2.2.4 Commutatieve groep 19](#_Toc501278314)

[2.2.5 Veld 19](#_Toc501278315)

[2.3 Rekenen in een groep 19](#_Toc501278316)

[2.3.1 Schrappen of vereenvoudigen 19](#_Toc501278317)

[2.3.2 Het symmetrisch element van a b 20](#_Toc501278318)

[2.3.3 Overbrengingsregel 21](#_Toc501278319)

[2.3.4 Inverse bewerking 21](#_Toc501278320)

[2.4 Oefeningen 21](#_Toc501278321)

# Getallenverzamelingen

God schiep de natuurlijke getallen en de rest is het werk van de mens.

*(Leopold Kronecker)*

## Opbouw van de natuurlijke getallen

De natuurlijke getallen zijn ons met de paplepel ingegeven en worden omschreven als “getallen die je gebruikt bij het tellen van aantallen”.

### Opbouw vanuit de verzamelingenleer

Cantor slaagde er in om vanuit de verzamelingenleer een wiskundige fundering te geven aan aantallen, grote aantallen en oneindige aantallen. Vroeger sprak men over oneindig in de zin van ‘nooit af zijn’, maar nu kan met redeneren met verschillende vormen van oneindigheid.

Vanuit verzamelingen en relaties slagen we er in om het evidente (eindige aantallen en tellen) te verzoenen met het paradoxale (oneindigheid).

#### Gelijkmachtige verzamelingen

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)**De verzamelingen A en B zijn **gelijkmachtig** (of **equipotent**) als en slechts als er een bijectie bestaat tussen A   
en B.  
Met symbolen: A # B ⇔ f: A B, f bijectie

**Voorbeeld**

en zijn equipotent want er bestaat een bijectie f: : n n + 4

De relatie “… is gelijkmachtig met…” is een equivalentierelatie, want de relatie is

* reflexief   
  want f: A A: x x is een bijectie, dus A # A
* symmetrisch  
  want de omgekeerde relatie van een bijectie is een bijectie, dus A # B ⇒ B # A
* transitief  
  want de samengestelde relatie van twee bijecties is een bijectie, dus A # B en B # C ⇒ A # C

#### Kardinaalgetal

Tussen twee verzamelingen die evenveel elementen bevatten kan steeds een bijectie gevormd worden, zodat 2 verzamelingen met evenveel elementen of dezelfde kardinaliteit steeds gelijkmachtig zijn.

**Voorbeeld**

A = {a, b, c}  
B = {1, 2, 3}  
A # B

Als we abstractie zouden maken van de aard van de elementen, hebben dergelijke verzamelingen nog steeds een gemeenschappelijke eigenschap, namelijk het aantal elementen, of hun **kardinaalgetal**.   
Alle mogelijke kardinaalgetallen vormen de verzameling van **de natuurlijke getallen**.

Een getal is de aanduiding van de hoeveelheid van iets (namelijk een verzameling). Een getal is dus een vorm van benoeming, waarmee we t.o.v. een aantal objecten van alles abstractie maken, behalve van de hoeveelheidseigenschap.   
Het getal 8 bijvoorbeeld duidt aan dat een verzameling 8 elementen heeft.   
Het telwoord “achtste” duidt aan dat we, de elementen op orde gezet, het 8ste element kunnen aanwijzen.   
Een natuurlijk getal is dus een abstracte aanduiding, een eigenschap (namelijk het aantal elementen) van een verzameling.

### Opbouw m.b.v. De axioma’s van Peano

[](https://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwill-rp557TAhXI1hoKHaJTD7YQjRwIBw&url=https://nl.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano&psig=AFQjCNHKPL_2zO8AYdtpVceniUIrqomFmA&ust=1492082812348148)In 1889 publiceerde de Italiaanse wiskundige Guiseppe Peano wat nu gekend staat als de Peano-axioma's. Dit is een stel axioma's voor de theorie van de natuurlijke getallen.

De axiomatische opbouw van de natuurlijke getallen volgens Peano kent drie primitieve begrippen: nul, natuurlijk getal en opvolger van een natuurlijk getal en bestaat uit vijf axioma’s:

1. Nul is een natuurlijk getal.
2. De opvolger van een natuurlijk getal is een natuurlijk getal.
3. Nul is niet de opvolger van een natuurlijk getal.
4. Zijn de opvolgers van natuurlijke getallen gelijk, dan zijn ook deze natuurlijke getallen gelijk.
5. Geldt een eigenschap voor het getal nul en geldt hij ook voor de opvolger van ieder getal met die eigenschap, dan hebben alle natuurlijke getallen deze eigenschap (principe van volledige inductie).

## Bewerkingen met natuurlijke getallen

In wat volgt definiëren we bewerkingen met natuurlijke getallen vanuit de verzamelingenleer.

### Optelling

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)**De som van twee natuurlijke getallen en is het kardinaalgetal van de vereniging van de disjuncte verzamelingen en , die respectievelijk en als kardinaalgetal hebben.

met en

#### Benamingen

In de **optelling** 3 + 2 = 5 noemen we 3 en 2 de **termen** en 5 de **som**.   
3 is het **opteltal** en 2 de **opteller**.

#### Eigenschappen

|  |  |
| --- | --- |
| met woorden | met symbolen |
| De optelling is **inwendig** in . |  |
| De optelling is **commutatief** in . |  |
| De optelling is **associatief** in . |  |
| 0 is het **neutraal element** voor de optelling in . |  |

De structuur van de natuurlijke getallen voorzien van de optelling is dus een **monoïde**.

B[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)ewijs deze eigenschappen.

### Aftrekking

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)**Het verschil van twee natuurlijke getallen en is het kardinaalgetal van het verschil van de verzameling en haar deelverzameling B, die respectievelijk en als kardinaalgetal hebben.

met en

De aftrekking kan ook gedefinieerd worden als **inverse bewerking** van het optellen:

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)** a, b, c ∈ : a – b = c ⇔ a = c + b

#### Benamingen

In de **aftrekking** 5 – 2 = 3 noemen we 5 en 2 de **termen** en 3 het **verschil**.   
5 is het **aftrektal** en 2 de **aftrekker**.

#### Eigenschappen

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Voorbeeld**nvoorbeeld |
| De aftrekking is niet overal gedefinieerd in . | 6 – 9 = -3 |
| De aftrekking is niet commutatief in . | 9 – 6 ≠ 6 – 9 (en bovendien is het resultaat van 6 – 9 ) |
| De aftrekking is niet associatief in . | (8 – 3) – 2 ≠ 8 – (3 – 2) |
| 0 is rechts-neutraal,  maar niet links-neutraal voor de aftrekking in . | maar 0 – 8 ≠ 8 |

### Vermenigvuldiging

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)**Het product van twee natuurlijke getallen en is het kardinaalgetal van de productverzameling van de verzamelingen en , die respectievelijk en als kardinaalgetal hebben.

met

#### Benamingen

In de **vermenigvuldiging** 3 ⋅ 2 = 6 noemen we 2 en 3 de **factoren** en 6 het **product**;   
2 is het **vermenigvuldigtal** en 3 de **vermenigvuldiger**.

#### Eigenschappen

|  |  |
| --- | --- |
| met woorden | met symbolen |
| De vermenigvuldiging is **inwendig** in . |  |
| De vermenigvuldiging is **commutatief** in . |  |
| De vermenigvuldiging is **associatief** in . |  |
| 1 is het **neutraal element** voor de vermenigvuldiging in . |  |
| De vermenigvuldiging is **distributief** t.o.v. de optelling en de aftrekking in . | (links-distributief)  (rechts-distributief) |

De structuur van de natuurlijke getallen voorzien van de vermenigvuldiging is dus een **monoïde**.

### Deling

De deling kan gedefinieerd worden als **inverse bewerking** van het vermenigvuldigen:

**[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)** a, b, c ∈ : a : b = c ⇔ a = c ⋅ b

Opmerking:

Je kan niet delen door nul:

➀ Een van nul verschillend getal kan je niet delen door nul.

➁ Nul delen door nul is onbepaald want het quotiënt kan gelijk zijn aan elk getal.

#### Benamingen

In de **deling** 6 : 3 = 2 (“2 gaat 3 keer in 6”) noemen we 6 en 3 de **factoren** en 2 het **quotiënt**;   
6 is het **deeltal** en 3 de **deler**.

#### Eigenschappen

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Voorbeeld**nvoorbeeld |
| De deling is niet overal gedefinieerd in . | 6 : 9 |
| De deling is niet commutatief in . | 4 : 2 ≠ 2 : 4 (en bovendien is het resultaat van 2 : 4 ) |
| De deling is niet associatief in . | (24 : 6) : 2 ≠ 24 : (6 : 2) |
| 1 is rechts-neutraal,  maar niet links-neutraal voor de deling in . | maar 1 : 8 ≠ 8 |
| De deling is **rechts-distributief** t.o.v. de optelling en de aftrekking in , maar niet **links-distributief** t.o.v. de optelling en de aftrekking in . | maar 30 : (2 + 3) ≠ (30 : 2) + (30 : 3) |

## Oneindig

Oneindig grote of oneindig kleine grootheden zorgen al sinds het begin van de mensheid voor filosofische overwegingen en vooral voor veel paradoxen en verwarring. Het blijkt namelijk dat ons natuurlijk begrip van hoeveelheid of aantallen of tellen niet correct werkt bij oneindigheid.

De tekst ‘Oneindig en oneindig is twee’ (zie bijlage) gaat dieper in op het begrip ‘oneindig’.

## Uitbreiding naar andere getallenverzamelingen

### De natuurlijke getallen

De verzameling van de **natuurlijke getallen** is ontstaan vanuit het tellen.  
Notatie:   
Opsomming: = {0, 1, 2, 3, 4,…}

### De gehele getallen

Binnen de natuurlijke getallen kunnen we elk tweetal getallen optellen (en vermenigvuldigen), maar aftrekken (en ook delen) kan niet altijd: het aftrekken is niet inwendig en overal bepaald in . Aftrekken is wel altijd mogelijk na het toevoegen van de tegengestelden van de natuurlijke getallen.

De natuurlijke getallen en hun tegengestelden zijn samen de **gehele getallen**.  
Notatie:   
Opsomming: = {…, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,…}

### De rationale getallen

Om een soortgelijke reden zijn de **rationale getallen** ingevoerd: de deling is niet inwendig en overal bepaald in . Een rationaal getal is het quotiënt van twee gehele getallen waarvan de deler niet nul is.  
Notatie:   
Omschrijving: =   
Benamingen: a noemen we de **teller**  
 b is de **noemer**   
 de horizontale lijn die teller en noemer van elkaar scheidt is de **breukstreep**

De noemer duidt aan in hoeveel gelijke delen je een geheel verdeelt, de teller duidt aan hoeveel delen je daarvan neemt.

Elke breuk kan als een decimale vorm geschreven worden door de teller te delen door de noemer. Deze decimale vorm zal één van de volgende gedaantes aannemen:

➊ een **geheel getal** als de teller een veelvoud is van de noemer

**Voorbeeld**

➋ een **begrensd kommagetal** als je de breuk kan schrijven als een decimale breuk (een breuk met noemer 10, 100, 1000…)

**Voorbeeld**

➌ een **onbegrensd repeterend kommagetal** met een periode, in sommige gevallen voorafgegaan door een niet-repeterend deel.  
Afspraak:

**Voorbeeld**

met periode 3 en niet-repeterend deel 8

Benamingen

* **Kommagetallen** zijn getallen waarin een komma voorkomt, gevolgd door één of meer decimalen.

**Decimalen** zijn cijfers na de komma.

Het **geheel deel** is het getal vóór de komma.

* Een **begrensd** **kommagetal** is een kommagetal met een eindig aantal decimalen.
* Een **onbegrensd kommagetal** is een kommagetal met oneindig veel decimalen.
* Een onbegrensd kommagetal is **repeterend** als één decimaal of een groep van decimalen zich voortdurend in dezelfde volgorde herhalen.  
  De **periode** is de kleinste groep decimalen die zich voortdurend herhaalt.  
  Een **zuiver repeterend kommagetal** is een repeterend kommagetal waarbij de periode meteen na de komma begint.  
  Een **gemengd repeterend kommagetal** is een repeterend kommagetal waarbij de periode niet meteen na de komma begint.  
  Een gemengd repeterend kommagetal heeft tussen de komma en de eerste periode een **niet-repeterend deel**.

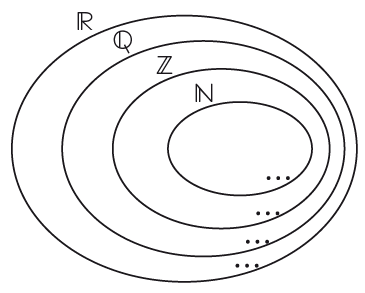
### De reële getallen

Naast de onbegrensde repeterende kommagetallen zijn er ook **onbegrensde niet-repeterende kommagetallen**. Denken we hierbij bijvoorbeeld aan π of . Deze getallen noemen we **irrationale getallen**.

De verzameling van de **reële getallen** is de verzameling van de rationale en irrationale getallen.  
Notatie:

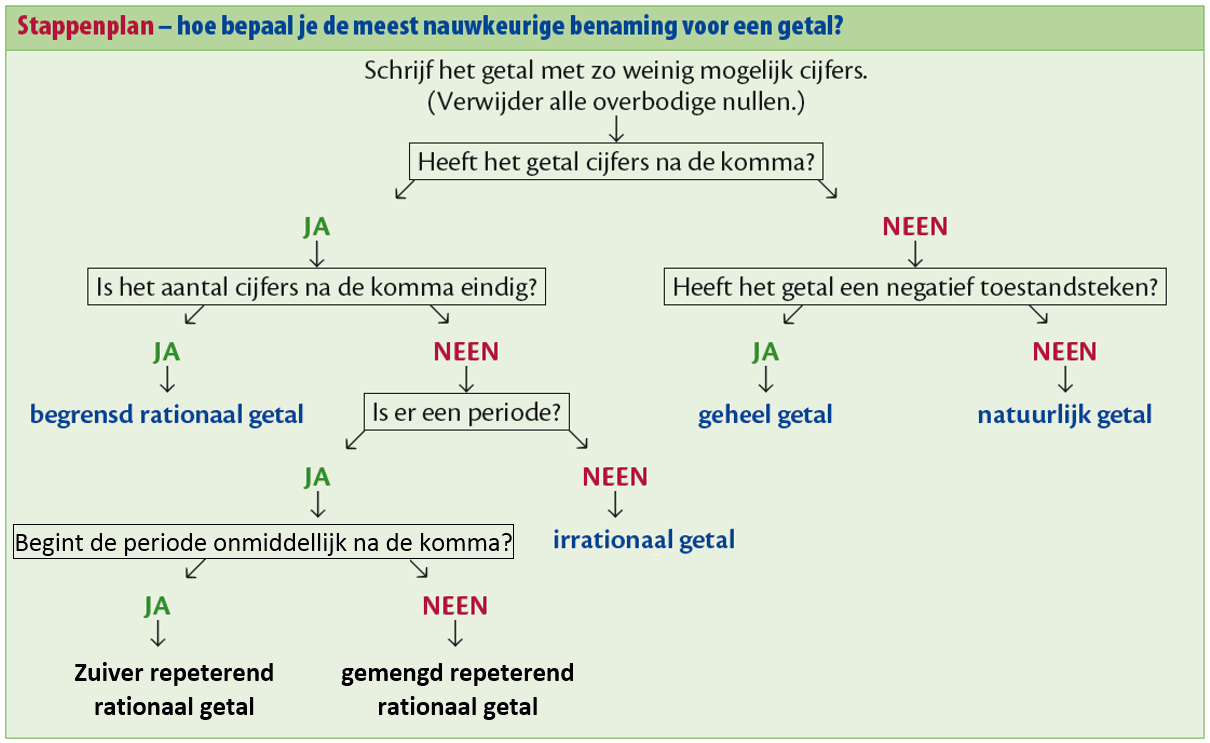
## Samengevat

### Voorstelling van de getallenverzamelingen met Venn-diagrammen

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)

Kleur het gebied waar de irrationale getallen zich bevinden blauw.

### De meest nauwkeurige benaming voor een getal bepalen



**Voorbeeld**

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Bepaal de meest nauwkeurige benaming voor de volgende getallen:

1. 2,10505…
2. –5,254
3. 13,0
4. 2,145875…

### De verzameling bepalen waartoe een getal behoort

Er is een verschil in omschrijving tussen

* Bepaal de meest nauwkeurige verzameling waartoe het getal … behoort.
* Bepaal elke verzameling waartoe het getal … behoort.

#### De meest nauwkeurige verzameling



**Voorbeeld**

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Bepaal de meest nauwkeurige verzameling waartoe de volgende getallen behoren:

1. 0,956842365…

#### elke verzameling

Stappenplan

➊ Bepaal de meest passende verzameling waartoe het getal behoort.

➋ Plaats het getal op de juiste plaats in het Venn-diagram.

➌ Noteer alle verzamelingen waartoe het getal behoort.

**Voorbeeld**

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Bepaal elke verzameling waartoe de volgende getallen behoren:

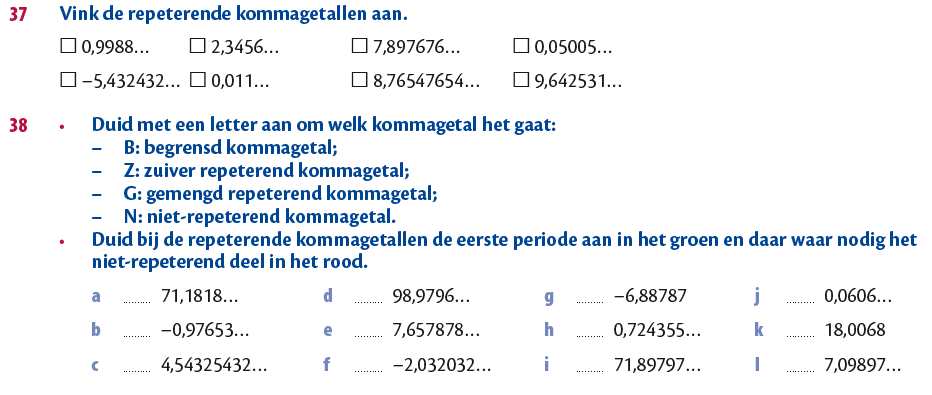
1. 0,956842365…

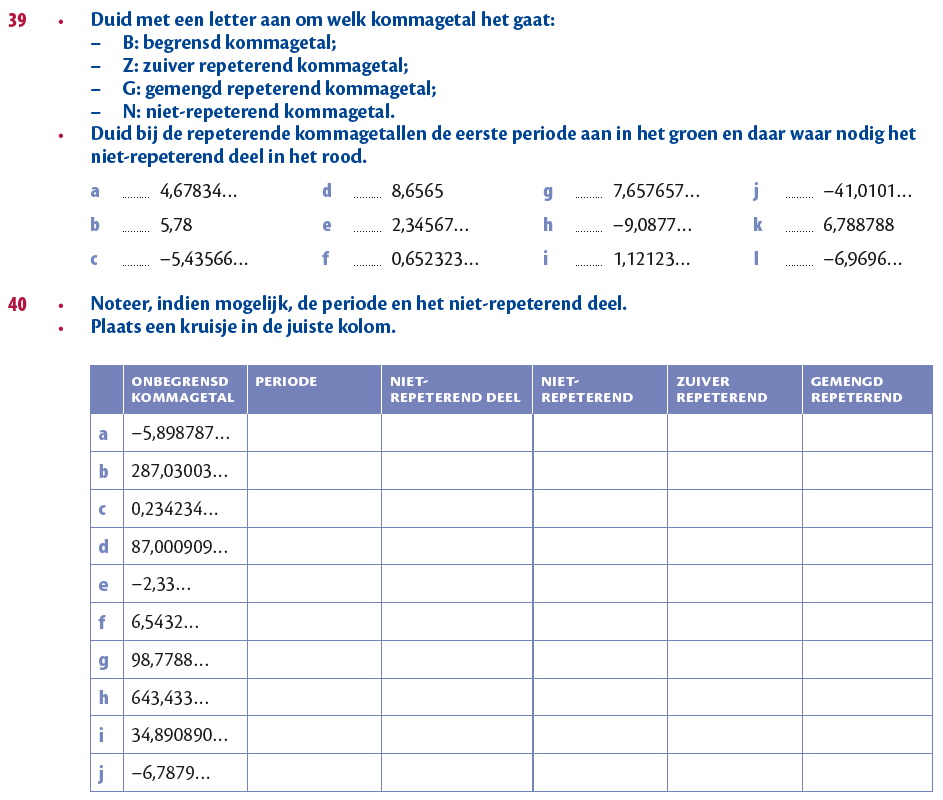
## Oefeningen

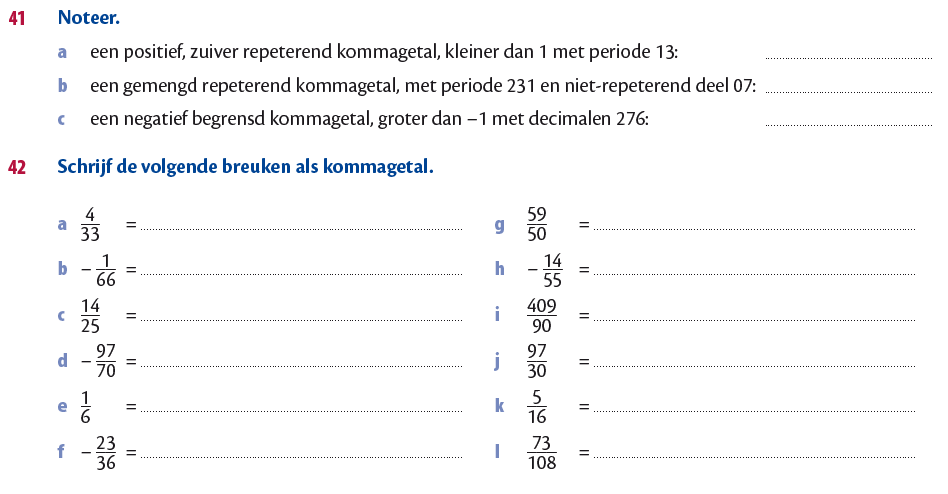
Bron:

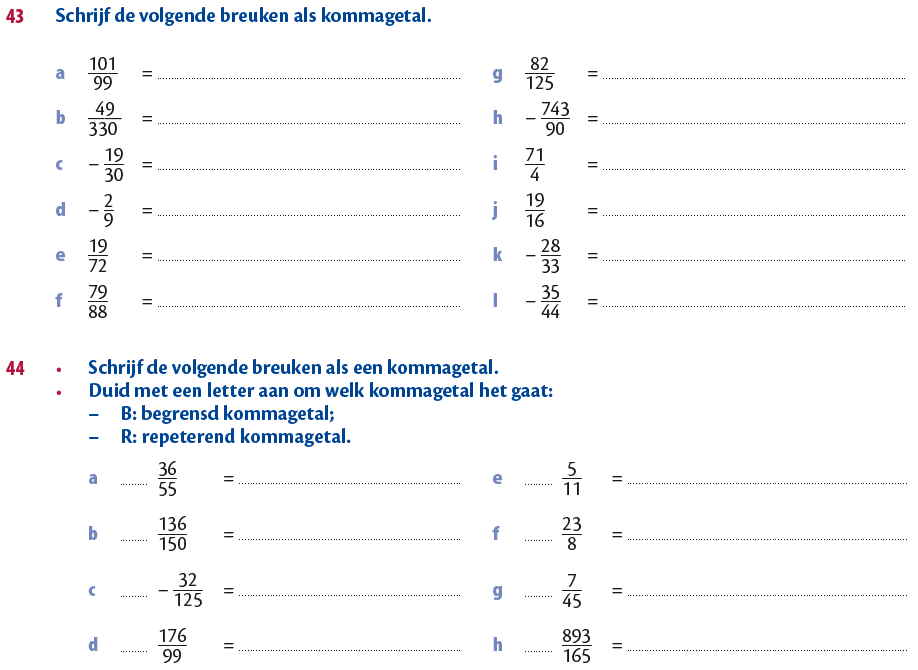
Vandepitte, H., Verstraete, K., & Putzeys, E. (2012). *Matrix wiskunde 3 - Leerwerkboek 3 uur wiskunde.* Kalmthout: Pelckmans Uitgeverij nv.

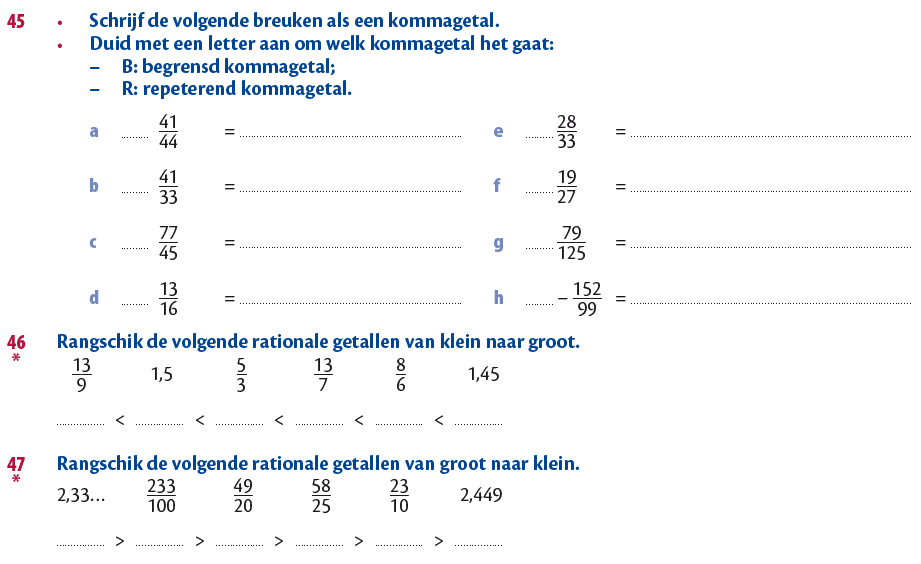
****

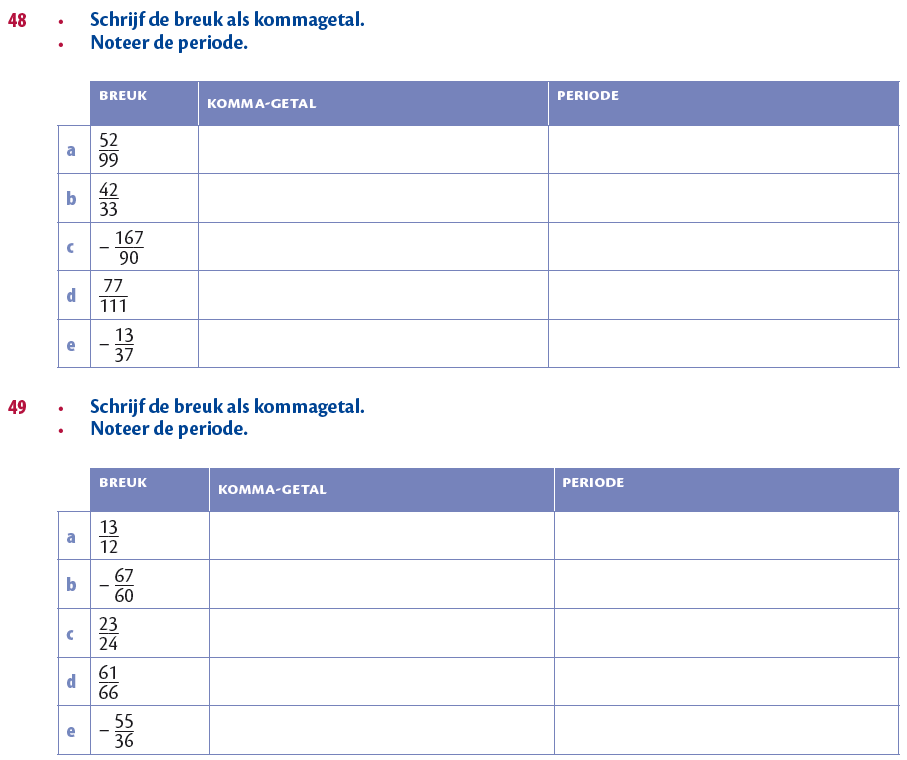


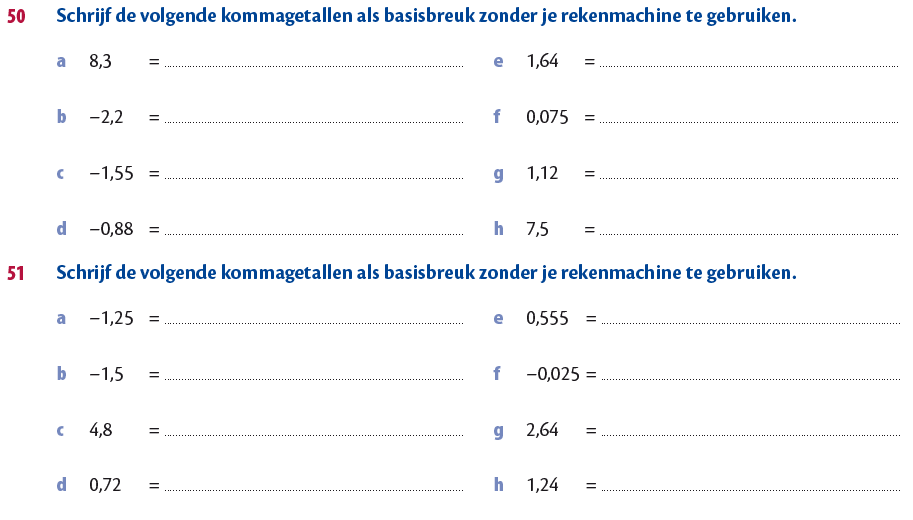


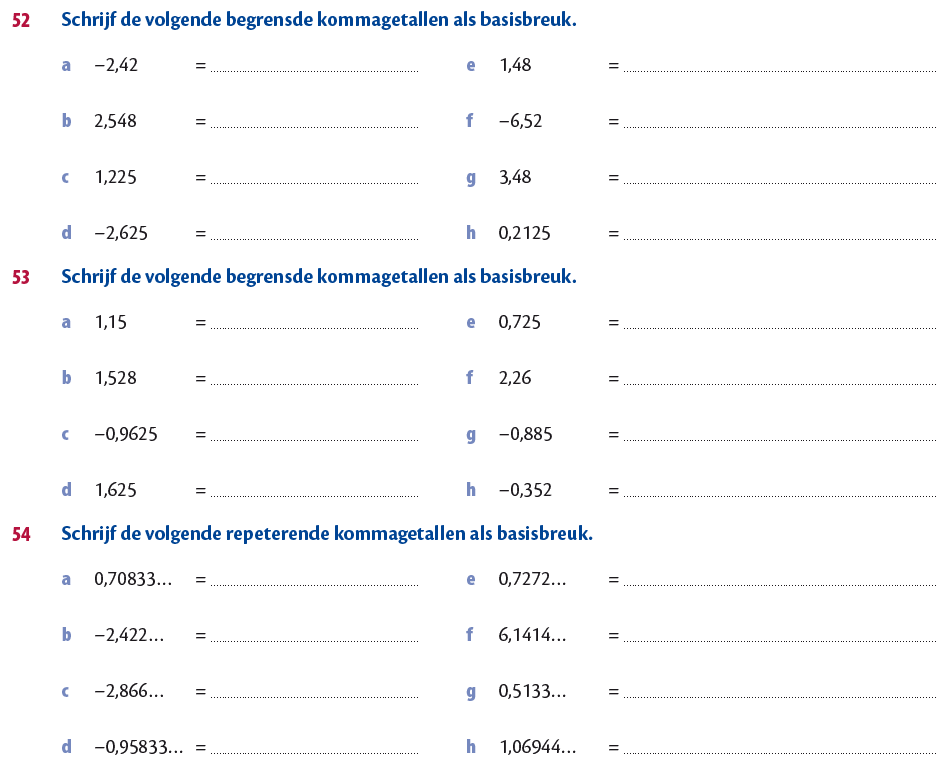


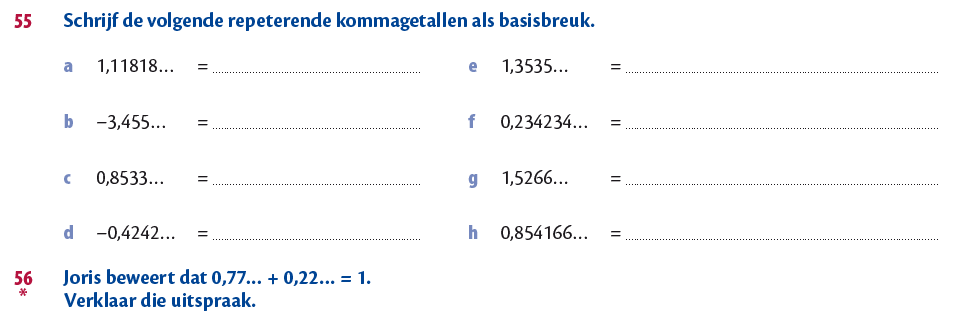


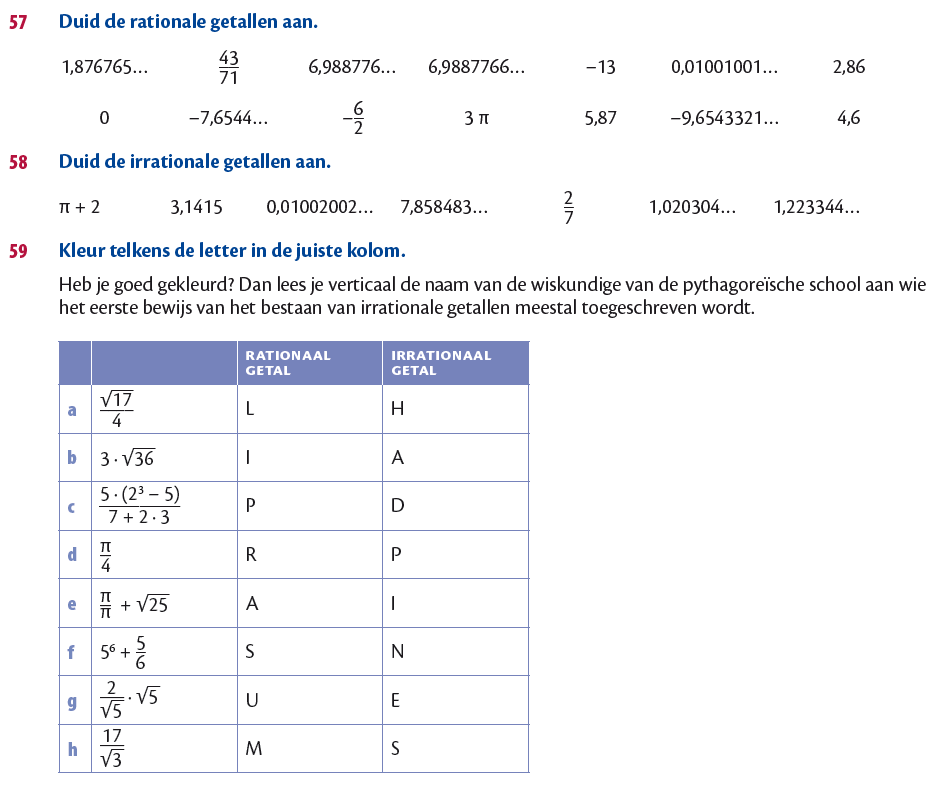


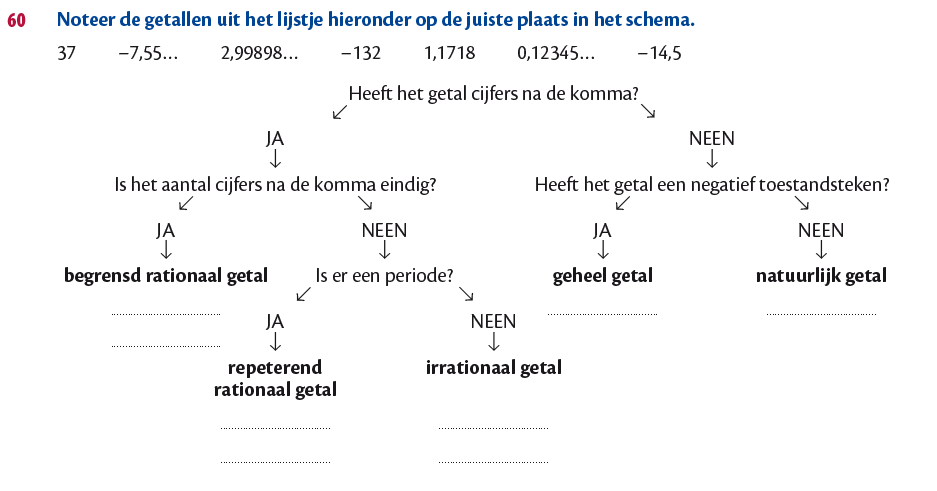


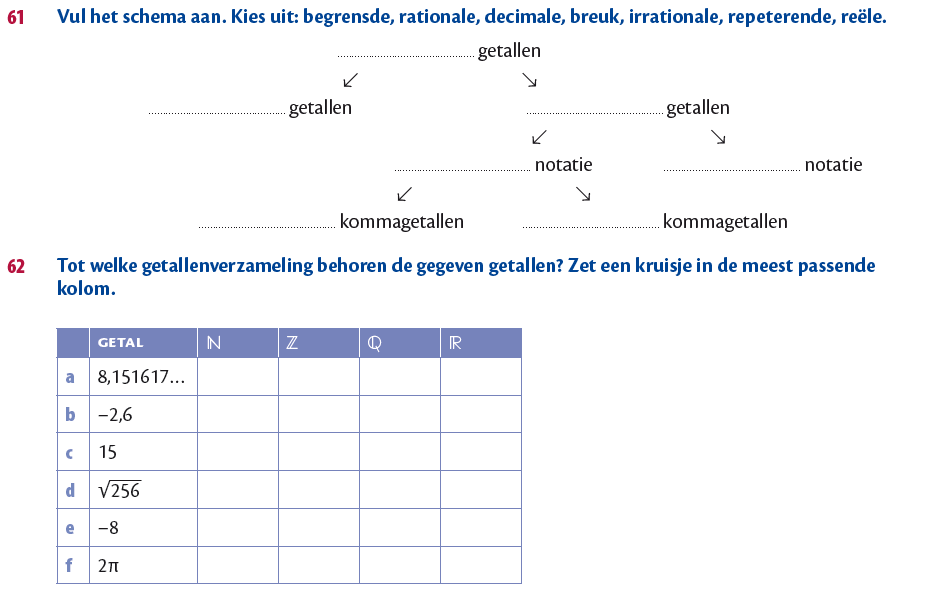


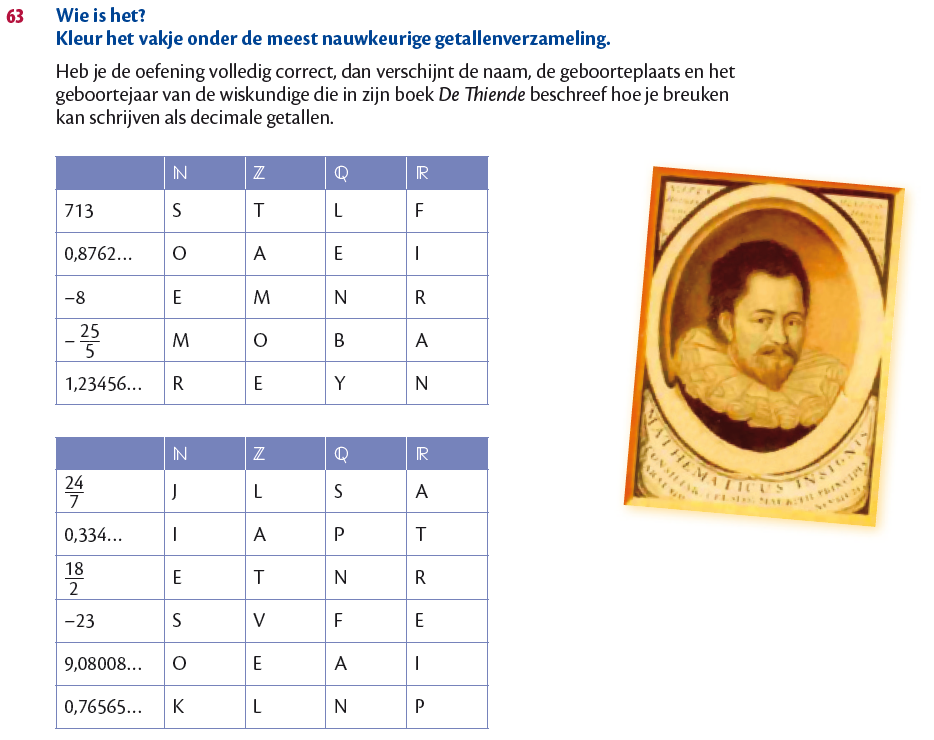


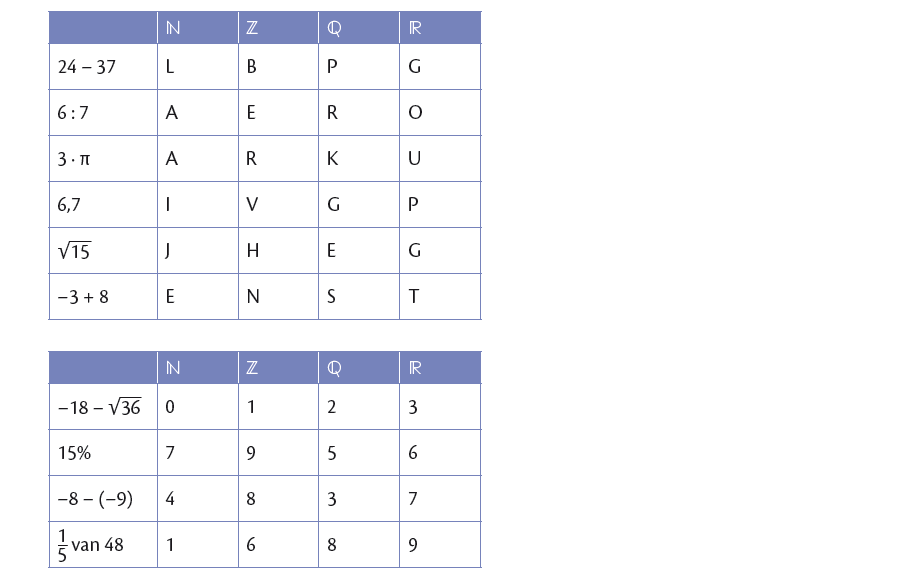


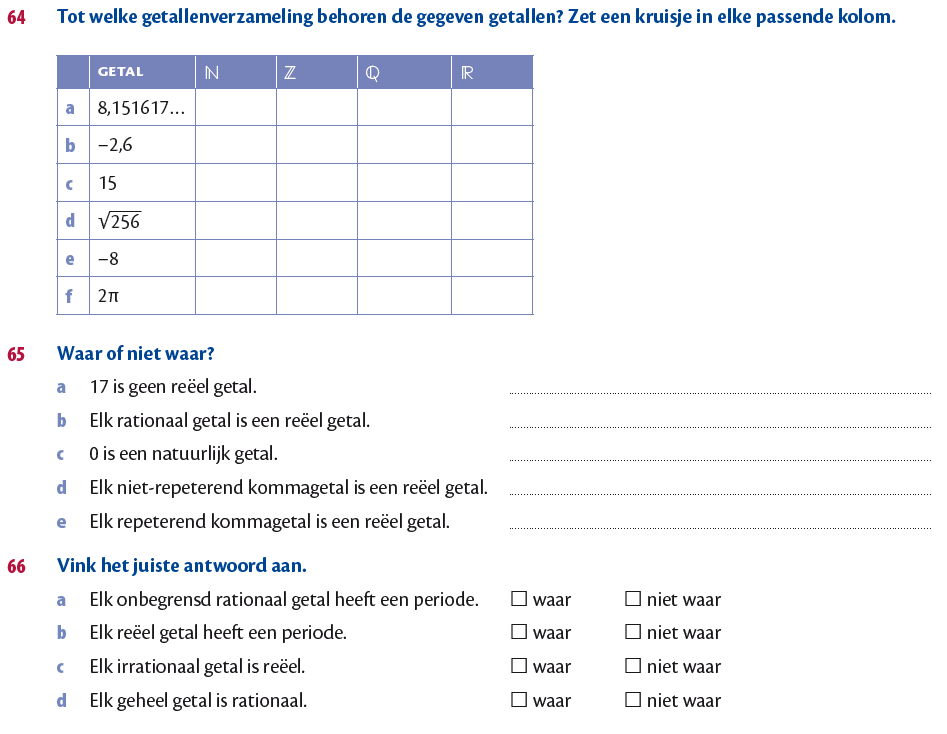


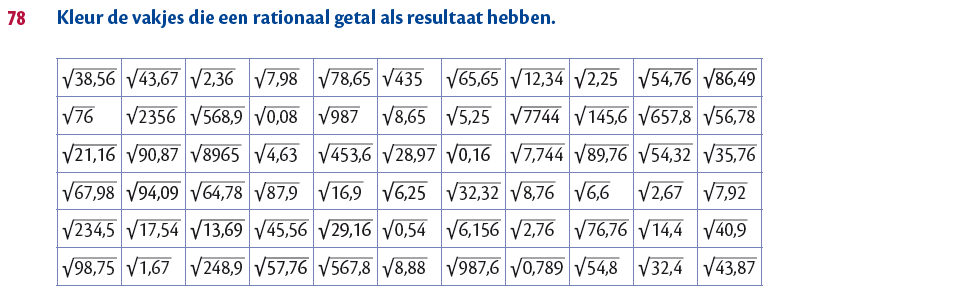












# structuren

## Eigenschappen van bewerkingen

### Inwendig en overal gedefinieerd

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De bewerking \* is inwendig en overal gedefinieerd in een verzameling V ⇔ x,y ∈ V: x \* y ∈ V

**Voorbeeld**

De aftrekking is inwendig en overal gedefinieerd in want voor elk koppel gehele getallen bestaat een geheel getal dat hun verschil is.  
MAAR: de aftrekking is niet inwendig en overal gedefinieerd in want 3 en 7 , maar 3 – 7 .

Opmerking: Het vermenigvuldigen van een koppel reële getallen met een reëel getal is een uitwendige bewerking omdat de factoren van het product r ⋅ (a,b) niet uit dezelfde verzameling komen:

* r
* (a,b)

### Commutativiteit

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De bewerking \* in V is commutatief ⇔ x,y ∈ V: x \* y = y \* x

**Voorbeeld**

➀ De optelling in is commutatief want de som van twee rationale getallen blijft gelijk als je de termen van plaats verwisselt.

➁ De deling in is niet commutatief want 4 : 2 ≠ 2 : 4.

### Associativiteit

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De bewerking \* in V is associatief ⇔ x,y,z ∈ V: (x \* y) \* z = x \* (y \* z) = x \* y \* z

**Voorbeeld**

➀ De vermenigvuldiging in is associatief want het product van drie natuurlijke getallen blijft gelijk als je haakjes toevoegt, weglaat of van plaats verwisselt.

➁ De aftrekking in is niet associatief want 2 – (4 – 6) ≠ (2 – 4) – 6.

### Neutraal element

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)Er bestaat in V een neutraal element n voor de bewerking \* ⇔ n ∈ V, x ∈ V: x \* n = x = n \* x

**Voorbeeld**

➀ Het getal 0 is het neutraal element voor de optelling van rationale getallen want x ∈ : x + 0 = x = 0 + x.

➁ De deling in heeft geen neutraal element want 4 : 1 = 4 maar 1 : 4 ≠ 4.

### Symmetrisch element

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)Elk element van V heeft voor de bewerking \* een symmetrisch element ⇔ x ∈ V, ∈ V: x \* = n = \* x

**Voorbeeld**

➀ Elk geheel getal heeft voor de optelling in een symmetrisch element, namelijk het **tegengesteld** geheel getal. ( x ∈ , -x ∈ : x + (-x) = 0 = -x + x)

➁ Elk reëel getal verschillend van nul heeft voor de vermenigvuldiging in een symmetrisch element, namelijk het **omgekeerd** reëel getal. ( x ∈ , x–1 ∈ : x ⋅ x–1 = 1 = x–1 ⋅ x)

➂ Het natuurlijk getal 5 heeft geen symmetrisch element voor de optelling in .

### Opslorpend element

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)Er bestaat in V een opslorpend element p voor de bewerking \* ⇔ p ∈ V, x ∈ V: x \* p = p = p \* x

**Voorbeeld**

➀ Het getal 0 is het opslorpend element voor de vermenigvuldiging van reële getallen want   
 x ∈ : x ⋅ 0 = 0 = 0 ⋅ x.

➁ De deling in heeft geen opslorpend element want 0 : 1,5 = 0 maar 1,5 : 0 bestaat niet.

### Distributiviteit

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De bewerking \* is distributief t.o.v. de bewerking in V ⇔ x,y,z ∈ V: x \* (y z) = x \* y x \* z

EN (x y) \* z = x \* z y \* z

**Voorbeeld**

➀ De vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de aftrekking in want x,y,z ∈ : x ⋅ (y – z) = x ⋅ y – x ⋅ z

EN (x – y) ⋅ z = x ⋅ z – y ⋅ z

➁ De machtsverheffing is niet distributief t.o.v. de optelling in want (4 + 5)² ≠ 4² + 5².

## Structuren

### Structuur

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)Een niet-lege verzameling die voorzien wordt van een of twee bewerkingen noemen we een **structuur**.

Notatie: De verzameling G (≠ ) voorzien van de bewerking \*, noteren we als volgt: G,\*  
De verzameling G (≠ ) voorzien van de bewerkingen \* en , noteren we als volgt: G,\*,

**Voorbeeld**

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)De verzameling voorzien van de optelling, noteren we als volgt:

De verzameling voorzien van de optelling en de vermenigvuldiging, noteren we als volgt:

### Monoïde

De structuur G,\* wordt een **monoïde** genoemd als en slechts als

➀ de bewerking \* inwendig en overal gedefinieerd is

➁ de bewerking \* associatief is

➂ de bewerking \* een neutraal element heeft dat tot G behoort

**Voorbeeld**

,+ is een monoïde want

➀ de optelling in is inwendig en overal gedefinieerd

➁ de optelling in is associatief

➂ de optelling in heeft een neutraal element dat tot behoort, namelijk 0

### Groep

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De structuur G,\* wordt een **groep** genoemd als en slechts als

➀ de bewerking \* inwendig en overal gedefinieerd is

➁ de bewerking \* associatief is

➂ de bewerking \* een neutraal element heeft dat tot G behoort

➃ elk element van G een symmetrisch element heeft dat eveneens tot G behoort.

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Noteer de definitie van een groep met symbolen.

G,\* is een groep

➀

➁

➂

➃

### Commutatieve groep

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De groep G,\* is een **commutatieve groep** als de bewerking \* een commutatieve bewerking is.

Met symbolen: G,\* is een commutatieve groep ⇔ ➀ G,\* is een groep

* a,b ∈ G: a \* b = b \* a

**Voorbeeld**

,+ is een commutatieve groep want

➀ de optelling in is inwendig en overal gedefinieerd

➁ de optelling in is associatief

➂ de optelling in heeft een neutraal element dat tot behoort, namelijk 0

➃ elk element van heeft voor de optelling een symmetrisch element dat ook to behoort, namelijk zijn tegengestelde

➄ de optelling in is commutatief

### Veld

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)De structuur G,\*, is een **veld** als en slechts als

➀ G,\* een commutatieve groep is

➁ G, een commutatieve groep is

➂ de bewerking distributief is t.o.v. de bewerking \* in G

**Voorbeeld**

,+,⋅ is een veld want

➀ ,+ is een commutatieve groep

➁ ,⋅ is een commutatieve groep

➂ de vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in

## Rekenen in een groep

In wat volgt, werken we in een groep G,. Dit impliceert dat we niet veronderstellen dat commutatief is.

### Schrappen of vereenvoudigen

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)In elke groep G, geldt:

➀ a,b,c ∈ G: a c = b c ⇒ a = b (rechtse schrappingswet)

➁ a,b,c ∈ G: c a = c b ⇒ a = b (linkse schrappingswet)

Bewijs: ➀ a c = b c

⇓ op beide leden dezelfde bewerking uitvoeren met hetzelfde element

(a c) = (b c)

⇓ de associatieve eigenschap in de groep G,

a (c ) = b (c )

⇓ eigenschap van het symmetrisch element in de groep G,

a n = b n

⇓ eigenschap van het neutraal element in de groep G,

a = b

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)➁ Bewijs zelf het tweede luik.

### Het symmetrisch element van a b

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)In elke groep G, geldt: a,b ∈ G: =

Bewijs: ➊ (a b) () = a (b )

= a n

= (a n)

= a

= n

➋ () (a b) = ( a) b

= n b

= ( n) b

= b

= n

Uit ➊ en ➋ volgt: is het symmetrisch element van a b voor de bewerking .

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Verklaar de overgangen in dit bewijs.

Opmerking: als G, een commutatieve groep is, dan is =

### Overbrengingsregel

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)In elke groep G, geldt:

➀ a,b,c ∈ G: a b = c ⇔ b = c

➁ a,b,c ∈ G: a b = c ⇔ a = c

Bewijs: ➀ a b = c ⇔ (a b) = c op beide leden dezelfde bewerking met hetzelfde element

⇔ ( a) b = c de associatieve eigenschap in de groep G,

⇔ n b = c eigenschap van het symmetrisch element in de groep G,

⇔ b = c eigenschap van het neutraal element in de groep G,

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)➁ Bewijs zelf het tweede luik.

Opmerking: als G, een commutatieve groep is, speelt de plaats van het overgebrachte element geen rol

### Inverse bewerking

[](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj7n9mEkrvNAhWjB8AKHQpSB-gQjRwIBw&url=http://www.csl.unifi.it/persone/laureandi-e-stagisti/&psig=AFQjCNFAvtldVxRtvizVxDm_NudvfX7PDg&ust=1466667920744656)In een groep G, geldt: a,b ∈ G: a b = a

We noemen de **inverse bewerking** van

**Voorbeeld**

De optelling en de aftrekking zijn inverse bewerkingen.

De vermenigvuldiging en de deling zijn inverse bewerkingen.

## [http://pix.iemoji.com/images/emoji/apple/ios-9/256/left-writing-hand.png](http://www.google.be/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjZv6uXk7vNAhVFIsAKHccrAscQjRwIBw&url=http://www.iemoji.com/view/emoji/1003/new/left-writing-hand&bvm=bv.125221236,d.ZGg&psig=AFQjCNGJTy7JytunEszJnuPiTa3yZ0yV3g&ust=1466668252694784)Oefeningen

**Oefening 1**

Plaats een kruisje als de uitspraak waar is in de gegeven verzameling.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De optelling is inwendig en overal gedefinieerd. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De optelling is commutatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De optelling is associatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De optelling heeft een neutraal element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Elk element van de optelling heeft een symmetrisch element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De optelling heeft een opslorpend element. |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Oefening 2**

Plaats een kruisje als de uitspraak waar is in de gegeven verzameling.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De aftrekking is inwendig en overal gedefinieerd. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De aftrekking is commutatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De aftrekking is associatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De aftrekking heeft een neutraal element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Elk element van de aftrekking heeft een symmetrisch element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De aftrekking heeft een opslorpend element. |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Oefening 3**

Plaats een kruisje als de uitspraak waar is in de gegeven verzameling.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De vermenigvuldiging is inwendig en overal gedefinieerd. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De vermenigvuldiging is commutatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De vermenigvuldiging is associatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De vermenigvuldiging heeft een neutraal element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Elk element van de vermenigvuldiging heeft een symmetrisch element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De vermenigvuldiging heeft een opslorpend element. |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Oefening 4**

Plaats een kruisje als de uitspraak waar is in de gegeven verzameling.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De deling is inwendig en overal gedefinieerd. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De deling is commutatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De deling is associatief |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De deling heeft een neutraal element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Elk element van de deling heeft een symmetrisch element. |  |  |  |  |  |  |  |  |
| De deling heeft een opslorpend element. |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Oefening 5**

In de verzameling V = {a, b, c, d} wordt de bewerking ∇ gedefinieerd door de volgende bewerkingstafel:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ∇ | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | b | a |
| d | d | c | a | b |

Onderzoek de eigenschappen van de bewerking ∇ in V.

**Oefening 6**

Bij het optellen van getallen modulo 8 werken we niet met de som zelf, maar met de rest verkregen na deling van de som door 8.  
Voorbeeld 15 + 26 = 41 (= 40 + 1)  
 41 mod 8 = 1

1. Stel een bewerkingstafel op voor het optellen modulo 8 in V = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.
2. Onderzoek de eigenschappen van het optellen modulo 8 in V = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

**Oefening 7**

Illustreer met een getallenvoorbeeld dat

1. de optelling niet distributief is t.o.v. de optelling.
2. de optelling niet distributief is t.o.v. de deling.
3. de optelling niet distributief is t.o.v. de vermenigvuldiging.
4. de aftrekking niet distributief is t.o.v. de aftrekking.
5. de vermenigvuldiging niet distributief is t.o.v. de vermenigvuldiging.
6. de vermenigvuldiging niet distributief is t.o.v. de deling.
7. de deling niet distributief is t.o.v. de deling.
8. de deling niet distributief is t.o.v. de vermenigvuldiging.

**Oefening 8**

Onderzoek m.b.v. getallenvoorbeelden het al dan niet distributief zijn van:

1. de machtsverheffing t.o.v. de optelling.
2. de machtsverheffing t.o.v. de aftrekking.
3. de machtsverheffing t.o.v. de vermenigvuldiging.
4. de machtsverheffing t.o.v. de deling.

**Oefening 9**

Welke structuur vormt

1. ,–
2. ,
3. ,

**Oefening 10**

Bepaal het symmetrisch element van het neutraal element van een groep G,

**Oefening 11**

Los op in de groep G, met neutraal element n.

1. a x = a
2. a x b = n
3. x = b
4. x a = a
5. a = b
6. a = n
7. b =
8. a x = n
9. x = b a
10. a b x = c

**Oefening 12**

In de verzameling V = {a, b, c,} wordt de bewerking gedefinieerd door de volgende bewerkingstafel:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c |
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

1. Toon aan dat V, een groep is.
2. Is V, ook een commutatieve groep?