



BACHELOR INDUSTRIEEL PRODUCTONTWERPEN

SEMESTER 1

ACADEMIEJAAR 2016-2017

1 IPO

BIEKE MASSELIS

TECHNOLOGIE: BIJLAGE BASISWISKUNDE

howest.be

1. BREUKEN

Een **breuk** is de schrijfwijze van een reëel getal onder de vorm $\frac{a}{b}$ met $b \neq 0$.

Een **tegengestelde getal** is een getal met dezelfde absolute waarde en met een verschillend teken. Een **omgekeerde getal** van het reëel getal r noteren we $\frac{1}{r}$ of nog r^{-1} . De omgekeerde breuk van $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$.

Een **breuk** is de schrijfwijze van een rationaal getal onder de vorm $\frac{t}{n}$ met $t, n \in \mathbb{Z}$ en $n \neq 0$. Hierbij is t de **teller** en n de **noemer**. De **omgekeerde** breuk van $\frac{t}{n}$ met $t, n \neq 0$ definiëren we als $\frac{1}{\frac{t}{n}} = \frac{n}{t}$ ofwel $\left(\frac{t}{n}\right)^{-1}$. De **tegengestelde** breuk is dan gelijk aan $-\frac{t}{n} = \frac{-t}{n} = \frac{t}{-n}$.

De rekenregels voor breuken kunnen we als volgt samenvatten:

Som → op gelijke noemer plaatsen	$\frac{t}{n} + \frac{a}{b} = \frac{t \times b + n \times a}{n \times b}$
Verschil → op gelijke noemer plaatsen	$\frac{t}{n} - \frac{a}{b} = \frac{t \times b - n \times a}{n \times b}$
Product → teller x teller, noemer x noemer	$\frac{t}{n} \times \frac{a}{b} = \frac{t \times a}{n \times b}$
Deling → vermenigvuldigen met het omgekeerde	$\frac{\frac{t}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{t}{n} : \frac{a}{b} = \frac{t}{n} \times \frac{b}{a}$
Machtsverheffing → teller en noemer tot de macht	$\left(\frac{t}{n}\right)^m = \frac{t^m}{n^m}$

2. VERGELIJKINGEN EN STELSELS OPLOSSEN

2.1 LINEAIRE VERGELIJKINGEN

Een **lineaire vergelijking** is een vergelijking in x die, na herleiding, van de vorm $ax+b=0$ is, met $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $b \in \mathbb{R}$.

Oplossingsmethode:

voorbeeld	werkwijze
$3x - (x+1) = 2(3x-5)$ $\Leftrightarrow$ $3x - x - 1 = 6x - 10$ $\Leftrightarrow$ $3x - x - 6x = -10 + 1$ $\Leftrightarrow$ $-4x = -9$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{9}{4}$	• Werk de haakjes weg. • Breng de termen die een onbekende bevatten in het ene lid, de andere termen in het ander lid. • Herleid beide leden. • Bereken x.

2.2 KWADRATISCHE VERGELIJKINGEN

Een **kwadratische vergelijking** of **vierkantsvergelijking** is een vergelijking in x die, na herleiding, van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ is, met $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $b, c \in \mathbb{R}$.

Oplossingsmethode:

Voorbeeld	werkwijze
$4x^2 = 6 - 5x$ $\Leftrightarrow$ $4x^2 + 5x - 6 = 0$ $D = 5^2 - 4 \times 4 \times (-6) = 121$ $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{3}{4}$ $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \times 4} = -2$	• Herleid de vierkantsvergelijking tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. • Bereken de discriminant $D = b^2 - 4ac$ • Als $D \geq 0$, dan heeft de vierkantsvergelijking twee oplossingen (of nulpunten) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

2.3 STELSEL VERGELIJKINGEN

Een **stelsel** lineaire vergelijkingen zijn n gekoppelde eerstegraadsvergelijkingen in m onbekenden, waaraan gelijktijdig moet worden voldaan. Het oplossen van een stelsel omvat niet het één na één oplossen van elke lineaire vergelijking, maar het simultaan oplossen van alle gekoppelde vergelijkingen.

We definiëren een stelsel als vierkant wanneer het net evenveel vergelijkingen als onbekenden bevat en dus kortweg een n bij n stelsel. Zo een vierkant stelsel kunnen we oplossen met de **substitutiemethode**. De substitutiemethode is een methode waarbij de lijst onbekenden systematisch wordt vervangen. We berekenen uit één van de vergelijkingen een onbekende naar keuze en substitueren dit in de andere vergelijkingen.

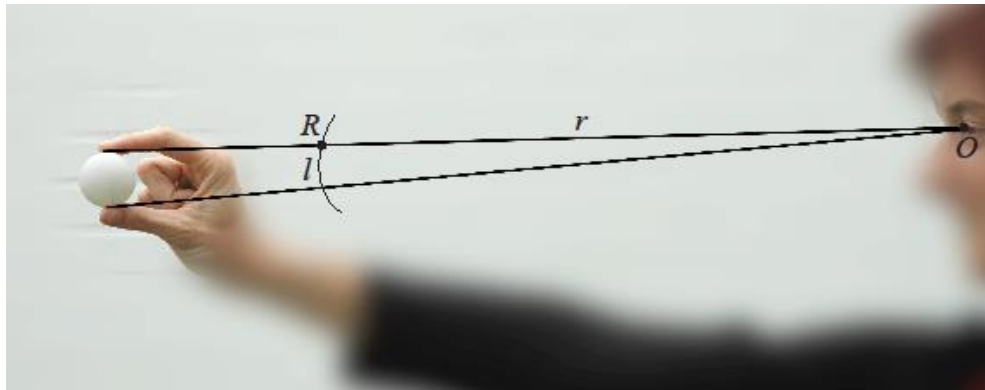
Oplossingsmethode:

Voorbeeld	Werkwijze
$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ x + y = 10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ y = 10 - x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -3x + 10 = -2 \\ y = 10 - x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -3x = -12 \\ y = 10 - x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 10 - x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 10 - 4 = 6 \end{cases}$	• We lossen bijvoorbeeld de laatste vergelijking op naar y. • Substitueer nu de gevonden uitdrukking $y = 10 - x$ in de voorgaande vergelijking. • Los de vergelijking in één onbekende op • De finale fase is een terugsubstitutie van de eerste bekende variabele waarde in de resterende vergelijking

3. FUNDAMENTEN VAN DE GONIOMETRIE

3.1 HOEKEN

We vangen het hoekgebied in een passeropening en definiëren hoek als de lengte van de cirkelboog gedeeld door de straal, $\alpha = \frac{l}{R}$.



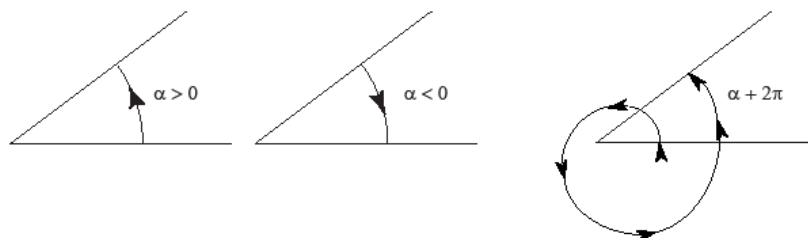
Per definitie drukken we dergelijk maatgetal voor een hoek uit in rad(ialen). Hoeken meten we dus in radialen of in graden. De maximale hoek is een cirkel, $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Met de regel van drieën zetten we dus heel eenvoudig om van graden naar radialen, of omgekeerd.

Omzetten van graden naar radialen en andersom gebeurt zo:

$180^\circ = \pi \text{ rad}$	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$
$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$	$\pi \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$
$k^\circ = k \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$	$k \text{ rad} = k \times \frac{180^\circ}{\pi}$

3.2 SOORTEN HOEKEN

Een positieve hoek draait in tegenwijzerzin en een negatieve hoek draait in wijzerzin. Voorts zijn alle hoeken α en α' , met $\alpha' = \alpha + k \cdot 2\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$, of alternatief uitgedrukt in graden $\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ$, gelijkwaardig.

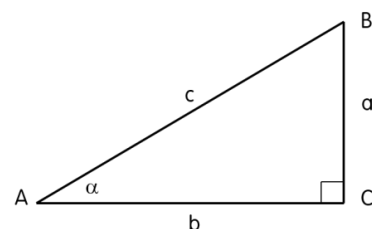


3.3 RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN

Als ABC een rechthoekige driehoek is met rechte hoek in C , scherpe hoek α bij A en zijden van lengte a , b en c tegenover respectievelijk A , B en C , dan gelden de volgende betrekkingen voor de scherpe hoek:

Sinus:
$$\sin \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

Cosinus:
$$\cos \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$



Tangens:
$$\tan \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

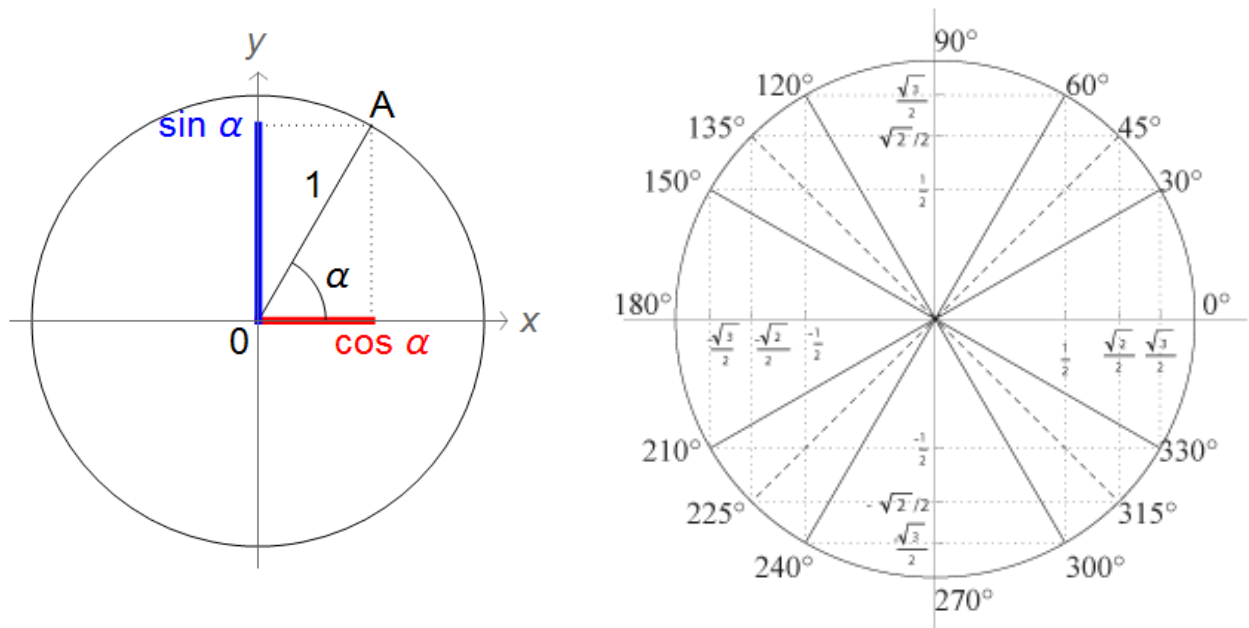
Stelling van Pythagoras
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Uit bovenstaande definities volgt onmiddellijk dat $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

3.4 EENHEIDSCIRKEL

De **eenheidscirkel** (goniometrische cirkel) is een cirkel die gelegen is in een orthonormaal assenstelsel. De oorsprong O is het middelpunt en de straal van de cirkel is gelijk aan één.

We krijgen nu eenvoudige nieuwe definities van de goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens daar de schuine zijde gelijk is aan de straal van de eenheidscirkel, met andere woorden gelijk is aan één. Deze definities zijn geldig voor alle hoeken (en niet enkel voor een scherpe hoek).



Aangezien de tangens gelijk is aan de sinus gedeeld door de cosinus kunnen we met bovenstaande waarden ook telkens de tangens bepalen.

Wanneer er een uitkomst x van de tangens gegeven is, zal er steeds precies één α zijn waarvoor respectievelijk geldt $\tan \alpha = x$. Het bijbehorende begrip om nu de α -waarde te vinden, heet de **boogtangens**, dit wordt meestal afgekort tot $Bgtan$, $arctan$, $atan$ of $\tan^{-1}$.

$$\alpha = Bgtan x \Leftrightarrow x = \tan \alpha \text{ en } \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3.5 COÖRDINATEN

Door gebruik te maken van de goniometrische formules kunnen we van elk punt P , waarvan we de afstand r tot de oorsprong en een richting α (hoek) kennen, de x -coördinaat en de y -coördinaat bepalen.

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

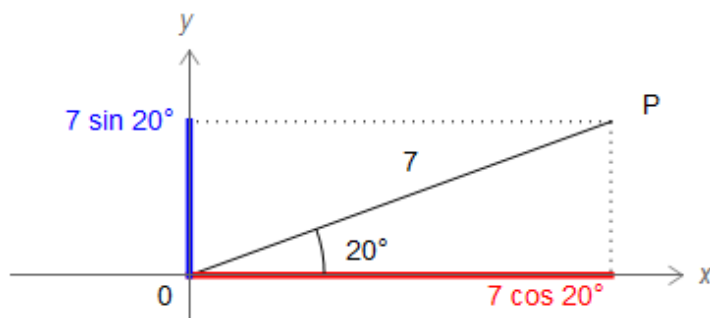
Zo zijn voor een punt P dat op 7 cm van de oorsprong ligt en een hoek van 20° maakt met de positieve x -as de coördinaten gelijk aan

$$x = 7 \cos 20^\circ$$

$$y = 7 \sin 20^\circ$$

want in de rechthoekige driehoek geldt

$$\cos 20^\circ = \frac{x}{7} \text{ en } \sin 20^\circ = \frac{y}{7}.$$



4. OEFENINGEN

1. Bereken.

a. $\frac{1}{2} + \frac{5}{3}$

f. $\frac{a}{6} + \frac{5a}{3} - \frac{3a}{4}$

k. $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$

p. $\frac{a}{b} - b$

b. $\frac{3x}{4} - \frac{x}{2}$

g. $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} - 2\pi$

l. $1 : \frac{a}{b}$

q. $\frac{a}{b} : \left(-\frac{a}{b}\right)$

c. $a - \frac{a}{5}$

h. $\frac{a}{2} \times \frac{3}{a}$

m. $1 - \frac{a}{b}$

r. $\frac{7a}{4} : \frac{3a}{8}$

d. $\frac{2}{a} + \frac{5}{a}$

i. $\frac{x}{12} \times \frac{8}{xy}$

n. $\frac{a}{b} : a$

s. $x + \frac{x}{3}$

e. $\frac{a}{2} + \frac{a}{5}$

j. $\frac{x}{5} : \frac{x}{3}$

o. $\frac{a}{b} : b$

t. $x : \frac{x}{3}$

2. Los de vergelijkingen op.

a. $x - 2 - 7x = 8 - x - 3$

f. $\frac{2x+3}{4x} = 6$

b. $(x - 4) + (2x - 5) = 4(x - 1)$

g. $x^2 + 4x + 1 = 0$

c. $\left(\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

h. $x^2 - 11x + 7 = 0$

d. $2\left(\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

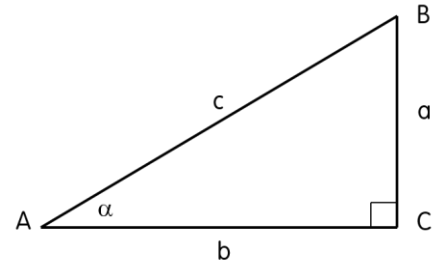
i. $3x^2 - 2 = x^2 + 2$

e. $\frac{1}{x+1} - 5$

j. $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{8} = 0$

3. Een trap bestaat uit 17 treden. Elke trede is 19 cm breed en 15 cm hoog. Bereken de lengte van de trapleuning.

4. In de volgende opgaven is van een rechthoekige driehoek ABC telkens de scherpe hoek α en één van de zijden gegeven. Bereken de andere twee zijden en de derde hoek.



- a. $\alpha = 30^\circ$, $c = 3$
b. $\alpha = 50^\circ$, $c = 7$
c. $\alpha = 30^\circ$, $b = 3$
d. $\alpha = 30^\circ$, $b = 7$
e. $\alpha = 50^\circ$, $a = 3$
f. $\alpha = 30^\circ$, $a = 7$
5. Een ladder van 11m staat tegen een muur; het onderste uiteinde van de ladder is 4 m van de voet verwijderd. Welke hoogte bereikt deze ladder tegen de muur?
6. Op een analoog uurwerk is het tien minuten over tien. Indien de minutenwijzer 5 cm lang is, wat zijn dan de x- en y-coördinaten van het uiteinde van de minutenwijzer.

